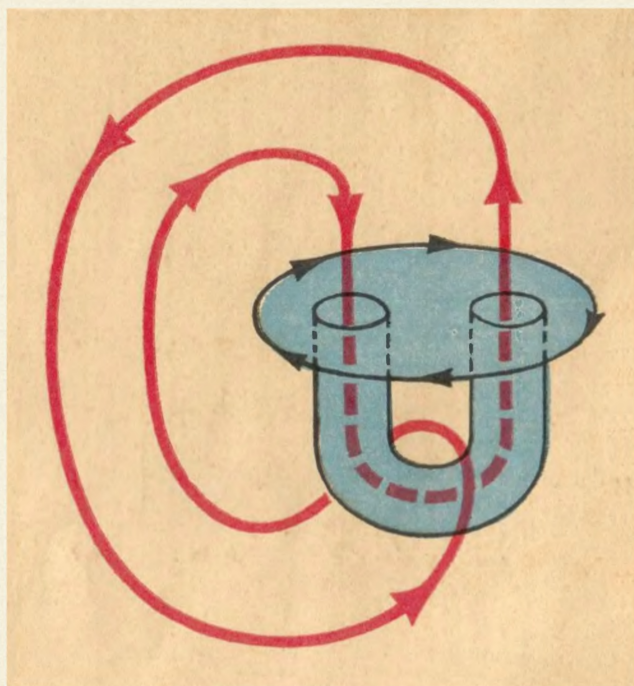




БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •
выпуск 21

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ
В. А. ЕФРЕМОВИЧ

НАГЛЯДНАЯ ТОПОЛОГИЯ



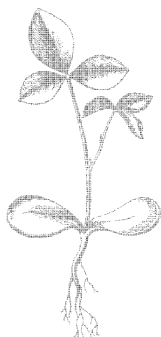


БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •
выпуск 21

**В. Г. БОЛТЯНСКИЙ
В. А. ЕФРЕМОВИЧ**

НАГЛЯДНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Под редакцией
С. П. НОВИКОВА



**МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ
1982**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Академик **И. К. Кикоин** (председатель), академик **А. Н. Колмогоров** (заместитель председателя), доктор физ.-мат. наук **Л. Г. Асламазов** (ученый секретарь), член-корреспондент АН СССР **А. А. Абрикосов**, академик **Б. К. Вайнштейн**, заслуженный учитель РСФСР **Б. В. Воздвиженский**, академик **В. М. Глушков**, академик **П. Л. Капица**, профессор **С. П. Капица**, академик **С. П. Новиков**, академик **Ю. А. Осипьян**, академик АПН РСФСР **В. Г. Разумовский**, академик **Р. З. Сагдеев**, кандидат хим. наук **М. Л. Смоленский**, профессор **Я. А. Смородинский**, академик **С. Л. Соболев**, член-корреспондент АН СССР **Д. К. Фаддеев**, член-корреспондент АН СССР **И. С. Шкловский**

Болтянский В. Г., Ефремович В. А.

Б 79 Наглядная топология. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 160 с. (Библиотечка «Квант», Вып. 21). — 25 коп.

Топология — сравнительно молодая математическая наука. Примерно за сто лет ее существования в ней достигнуты результаты, важные для многих разделов математики. Поэтому проникновение в «мир топологии» для начинающего несколько затруднительно, так как требует знания многих фактов геометрии, алгебры, анализа и других разделов математики, а также умения рассуждать.

Книга написана просто и наглядно. В форме, доступной для понимания школьников, она знакомит читателя с идеями топологии, ее основными понятиями и фактами. Большое количество рисунков облегчает усвоение материала. Этому же способствуют свыше двухсот задач.

Для школьников, преподавателей, студентов.

$\frac{1702040000-134}{053(02)-82}$ КБ-9-32-82

ББК 22.15
517.6

$\frac{1702040000-134}{053(02)-82}$ КБ-9-32-82

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1982

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Простейшие идеи топологии возникают из непосредственного наблюдения за окружающим миром. Интуитивно ясно, что высказывания о геометрических свойствах фигур не вполне исчерпываются сведениями об их «метрических» свойствах (размерах, углах и т. д.). Остается еще «кое-что» за пределами старой геометрии. Какой бы длинной ни была линия (веревка, провод, длинная молекула), она может быть замкнутой или нет; если линия замкнута, то она может сложным образом «заузляться». Две (или более) замкнутые линии могут «зацепляться» одна с другой и притом различными способами. Тела, их поверхности, могут иметь «дырки». Эти свойства тел характеризуются тем, что они не меняются при деформациях, допускающих любые растяжения без разрывов. Такие свойства и называются топологическими. Кроме элементарных геометрических фигур, топологическими свойствами обладают многие чисто математические объекты, и именно это определяет их важность.

Однако легче подметить существование топологических свойств фигур, чем создать их «исчисление», т. е. раздел математики, обладающий точными понятиями, строгими законами и методами, математическими формулами, изображающими топологические величины.

Первые важные наблюдения и точные топологические соотношения были найдены еще Эйлером, Гауссом и Риманом. Тем не менее, без преувеличения можно сказать, что топология как раздел науки основана в конце XIX века А. Пуанкаре. Процесс построения топологии и решения ее внутренних задач оказался трудным и длительным: он продолжался не менее 70—80 лет, наполненных глубокими открытиями и, в ряде случаев, даже пересмотром основ. В нем принял участие ряд наиболее выдающихся математиков своего времени, включая советских *). На

*) Советская топологическая школа возникла в Москве, в 20-х годах нашего века. Ее создатели — П. С. Урысон и П. С. Александров.

протяжении многих лет, приблизительно до конца 50-х годов, топология рассматривалась даже математиками других областей как красивая, но бесполезная игрушка. Автор этих строк должен откровенно признаться, что еще в студенческие времена, в 50-х годах, выбрал себе эту область для будущей деятельности, увлеченный ее красотой и необычностью по сравнению с более традиционными разделами математики, и при этом значительное время (до конца 60-х годов) испытывал неудовлетворенность итогами развития этой области именно из-за недостатка приложений. Следует заметить, что ряд красивых топологических закономерностей в других разделах математики был уже к тому времени обнаружен — в теории функций и комплексном анализе, в качественной теории динамических систем и уравнений с частными производными, в теории операторов и даже в алгебре.

Однако лишь с начала 70-х годов началось интенсивное проникновение методов топологии в аппарат современной физики. Сейчас важность топологических методов для различных разделов физики уже не вызывает сомнений — для теории поля и общей теории относительности, физики анизотропных сплошных сред и низких температур, современной квантовой теории и т. д. Это приводит к необходимости появления достаточно элементарных популярных книг по топологии и ее приложениям, доступных (хотя бы частично) для школьников старших классов и студентов младших курсов с естественнонаучными и техническими интересами.

Эта книга написана известными топологами и геометрами В. Г. Болтянским и В. А. Ефремовичем, которые много лет посвятили работе, направленной на популяризацию идей топологии. К книге добавлено Приложение, посвященное изложению одного интересного применения топологии в теории нематических жидких кристаллов. Автор Приложения, В. П. Минеев, внес значительный вклад во внедрение методов топологии в теоретическую физику.

Мы надеемся, что книга будет весьма полезна широкому кругу читателей.

С. П. Новиков

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Топология — сравнительно молодой и очень важный раздел математики. Известный французский математик Андре Вейль сказал, что за душу каждого математика борются ангел топологии и дьявол абстрактной алгебры, выразив этим, во-первых, необычайное изящество и красоту топологии и, во-вторых, то, что вся современная математика представляет собой причудливое переплетение идей топологии и алгебры. А за последнее время топология все более проникает в физику, химию, биологию — один пример применения идей топологии в физике читатель найдет в Приложении, написанном В. П. Минеевым. Однако проникновение в волшебный мир топологии затруднительно. Подобно тому, как строительные леса, окружающие недостроенное здание, мешают охватить взглядом красоту архитектурного замысла, так многочисленные и утомительные детали построения, заполняющие книги по топологии, затрудняют охватить мысленным взором красивое здание этой математической науки. Даже специалисты-математики нередко отступают перед трудностями на пути овладения топологией (особенно алгебраической топологией, первоначальным идеям которой посвящена третья часть этой книги).

Все это делает очень важным написание популярных книг по топологии. Первая книга такого рода была выпущена в нашей стране еще в середине 30-х годов*). Впоследствии, начиная с 1957 г., во 2-м, 3-м, 4-м и 6-м выпусках «Математического просвещения» была опубликована по частям наша книга «Очерк основных идей топологии» (в Польше, Японии и Венгрии книга была выпущена отдельным изданием). Однако обе книги давно уже стали библиографической редкостью. В предлагаемую вниманию читателя книгу включена часть материала из «Очерка», в связи с чем В. А. Ефремович является одним из

*) Александров П. С., Ефремович В. А. Очерк основных понятий топологии.— М., 1936.

авторов книги (и, кстати, основным инициатором написания «Очерка» и проведения популяризаторской работы в области топологии). Однако большую часть текста я написал заново (с учетом некоторых научных результатов, полученных за последние годы). Кроме того, я включил в книгу свыше двухсот задач — ведь чтение научной книги (даже популярной) лишь тогда приносит пользу, когда самостоятельно размышляешь над излагаемыми вопросами.

Пользуюсь случаем поблагодарить С. П. Новикова за ценные замечания, а также всех читателей, которые захотят высказать мнение об этой книге и замечания к ней.

В. Г. Болтянский

* * *

Это издание подготовил к печати В. Г. Болтянский, значительно переработав и дополнив материал нашего «Очерка». За все это искренне его благодарю; выражаю также признательность С. П. Новикову за ценные замечания и поддержку.

В. А. Ефремович

ТОПОЛОГИЯ ЛИНИЙ

1. Идея непрерывности

В основе, в истоках каждого отдела математики можно видеть основную идею, которая пронизывает всё его здание и определяет его лицо. Основной идеей топологии является идея *непрерывности*. Она встречается уже в математическом анализе, но, подчиненная другим идеям анализа, не получает там заметного развития. Свое полное и всестороннее развитие идея непрерывности получает в топологии. Приведем два примера применения этой идеи.

Пример 1. Покажем, что кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

с произвольными действительными коэффициентами a , b , c имеет, по крайней мере, один действительный корень.

Запишем уравнение (1) (при $x \neq 0$) в виде

$$x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \right) = 0. \tag{2}$$

При очень большом $|x|$ слагаемые $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x^2}$, $\frac{c}{x^3}$ очень малы по модулю, а выражение в скобках мало отличается от единицы и потому положительно. Следовательно, при очень большом $|x|$ левая часть уравнения (2) имеет тот же знак, что и x^3 , т. е. тот же знак, что и x . Иначе говоря, при большом отрицательном x (точка x_0 на рис. 1) левая часть уравнения (1) отрицательна, а при большом положительном x (точка x_1) она положительна.

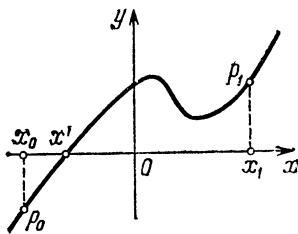


Рис. 1.

Так как график является *непрерывной кривой*, то, переходя с одной стороны оси абсцисс на

другую (из точки p_0 в точку p_1), он пересечет эту ось хотя бы в одной точке. Точка x' пересечения графика с осью абсцисс и дает корень уравнения (1).

Задачи

1. Докажите, что всякое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

2. Докажите, что если в уравнении (1) свободный член c отрицателен, то это уравнение имеет хотя бы один положительный корень.

Пример 2. Покажем, что вокруг всякой замкнутой кривой K можно описать квадрат.

Проведем две параллельные прямые l, l' так, чтобы кривая K была расположена в полосе между ними, и будем перемещать сначала прямую l , а затем l' параллельно

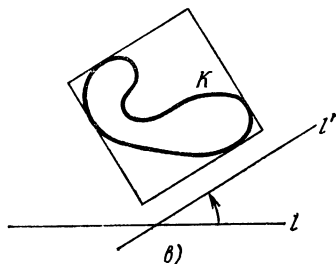
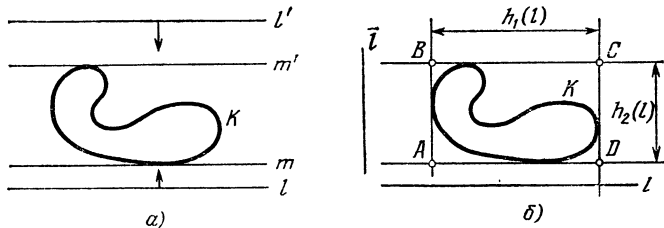


Рис. 2.

себе, до тех пор, пока они не коснутся кривой K . Полученные прямые m, m' (рис. 2, а) называются параллельными между собой *опорными* прямыми линии K . Проведем еще две опорные прямые, перпендикулярные l (рис. 2, б). Мы получим описанный вокруг линии K прямоугольник $ABCD$. Докажем, что при некотором направлении прямой l прямоугольник $ABCD$ превратится в квадрат.

Обозначим длину стороны AD , параллельной l , через $h_1(l)$, а длину стороны AB , перпендикулярной l , — через

$h_2(l)$. Описанный прямоугольник будет квадратом при $h_1(l) - h_2(l) = 0$.

Пусть \bar{l} — прямая, перпендикулярная l . Описанный прямоугольник со сторонами, параллельными и перпендикулярными \bar{l} , совпадает с тем же прямоугольником $ABCD$, но параллельной \bar{l} является сторона AB , а перпендикулярной \bar{l} — сторона AD , т. е. $h_1(\bar{l}) = |AB| = h_2(l)$, $h_2(\bar{l}) = |AD| = h_1(l)$. Таким образом,

$$h_1(\bar{l}) - h_2(\bar{l}) = -(h_1(l) - h_2(l)). \quad (3)$$

Будем теперь поворачивать прямую l , пока она не совпадет с \bar{l} . При этом описанный прямоугольник будет плавно меняться, а разность $h_1(l) - h_2(l)$ будет непрерывно зависеть от l . Но при переходе от l к \bar{l} эта разность меняет знак (см. (3)). Следовательно, при своем непрерывном изменении она (при некотором положении прямой l) обращается в нуль, т. е. описанный прямоугольник превращается в квадрат (рис. 2, в).

Задачи

3. Докажите, что вокруг всякой замкнутой кривой K можно описать ромб с углом 60° .

4. Докажите, что если диаметр плоской фигуры не превосходит d (т. е. расстояние между любыми ее точками не больше d), то существует правильный шестиугольник, содержащий эту фигуру, у которого расстояние между противоположными сторонами равно d .

5. Докажите, что если диаметр пространственной фигуры не превосходит d , то существует правильный октаэдр, содержащий эту фигуру, у которого расстояние между противоположными гранями равно d .

В топологии рассматриваются функции наиболее общего вида. Задать функцию — это значит каждой точке некоторого множества A (области определения функции) поставить в соответствие определенную точку $f(x)$ некоторого другого множества B . Говорят в этом случае также, что задано отображение f множества A в множество B . Кратко это записывают в виде $f: A \rightarrow B$.

Пример 3. Обозначим через A контур равностороннего треугольника, а через B — описанную вокруг него окружность (рис. 3). Тогда центральное проектирование p точек множества A на окружность является отображением $p: A \rightarrow B$.

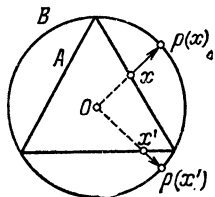


Рис. 3.

Функция $f: A \rightarrow B$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in A$, если для x , «мало» отличающихся от x_0 , значения $f(x)$ и $f(x_0)$ тоже «мало» отличаются друг от друга.

Более точно, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для любого x , отстоящего от x_0 менее чем на δ , соответствующее значение $f(x)$ отстоит от $f(x_0)$ менее чем на ε . Это определение имеет смысл, если и в множестве A , и в множестве B определено расстояние между точками.

Чтобы яснее понять, что такое непрерывность отображения, рассмотрим пример разрыва, т. е. нарушения непрерывности отображения. Возьмем обычную резинку, которую применяют в аптеке для упаковки лекарств. Она имеет форму окружности. Будем ее осторожно деформировать, и вдруг она в некоторой своей точке a разорвется. Что это значит? Некоторая ее часть B (рис. 4, а),

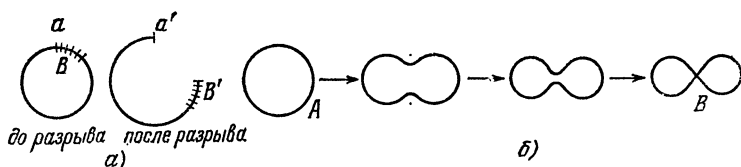


Рис. 4.

которая была «близка» к a (т. е. находилась от нее на нулевом расстоянии), после разрыва (теперь ее обозначим через B') оказывается вовсе не близкой к a' (новое положение точки a). Итак, разрыв в точке a — это такое событие, когда некоторая часть B фигуры, бывшая раньше близкой к a (пишем: $B\delta a$), становится неблизкой к новому положению a' точки a .

Теперь понятно следующее определение:

Отображение $f: x \rightarrow x'$ называется непрерывным в точке a , если всякая часть B отображаемой фигуры, бывшая близкой к a (т. е. $B\delta a$), после отображения переходит в положение B' , близкое к точке $a' = f(a)$ (т. е. $B'\delta a'$).

Можно доказать, что это определение эквивалентно приведенному выше определению.

Если отображение $f: A \rightarrow B$ непрерывно в каждой точке x_0 множества A , то говорят просто, что отображение f непрерывно. Наглядно непрерывность отображения можно себе представить, сказав, что «близкие» точки множества A переходят в «близкие» точки множества B , т. е. при отображении f не происходит разрыва, нарушения цельности множества A . Заметим, что при этом различные точки множества A могут образовывать «спайки» (рис. 4, б), «закладки» и т. п.

Задачи

6. Докажите, что отображение, рассмотренное в примере 3, непрерывно.

7. Для произвольного действительного a обозначим через $f(a)$ наибольший из корней уравнения $x^3 - 3x + a = 0$. Является ли функция $f(x)$ непрерывной?

2. Чем занимается топология?

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *взаимно однозначным*, если в каждую точку множества B отображается точно одна точка множества A . Это означает, что, во-первых, никакие две различные точки множества A не переходят в одну и ту же точку множества B (не «склеиваются» при отображении f) и, во-вторых, каждая точка множества B поставлена в соответствие некоторой точке множества A (т. е. A отображается на всё множество B , а не на его часть). Для взаимно однозначного отображения $f: A \rightarrow B$ можно определить *обратное отображение* $f^{-1}: B \rightarrow A$ (которое каждой точке $y \in B$ ставит в соответствие точку множества A , переходящую в y при отображении f).

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *гомеоморфным отображением* (или *гомеоморфизмом*), если оно, во-первых, взаимно однозначно и, во-вторых, взаимно непрерывно, т. е. не только само отображение f непрерывно, но и обратное отображение f^{-1} также непрерывно.

Наглядно гомеоморфизм можно представлять себе как такое отображение одного множества на другое, которое происходит и без разрывов, и без склеиваний. Например, будем считать, что фигуры A , B «изготовлены» из очень прочного и эластичного материала, и будем допускать любые растяжения и искривления этого материала без разрывов и без образования складок и склеек; если мы сможем при этих условиях «наложить» фигуру A на B , то они гомеоморфны. Так, контур треугольника (или, вообще, любого многоугольника) гомеоморфен окружности.

Пример 4. Поверхность шара, поверхность куба, цилиндра — все гомеоморфны между собой. Однако эти поверхности не гомеоморфны *тору* (который можно наглядно представить себе как поверхность баранки или автомобильной камеры, рис. 5). Поверхность гири (рис. 6) гомеоморфна тору.

Пример 5. Будем представлять себе буквы русского алфавита в виде линий. Буквы Г, Л, М, П, С гомеоморфны

между собой. Буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны указанным ранее буквам. Буква О не гомеоморфна никакой другой букве русского алфавита.

Пример 6. Пусть A — полуокружность с центром o , из которой исключены концевые точки m , n , а B — касатель-

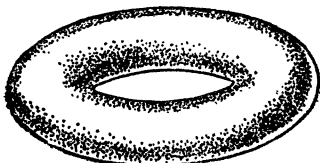


Рис. 5.

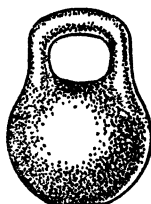


Рис. 6.

ная к полуокружности, параллельная диаметру mn (рис. 7). Центральное проектирование $p: A \rightarrow B$ из центра o является гомеоморфизмом. Таким образом, прямая гомеоморфна полуокружности без концевых точек.

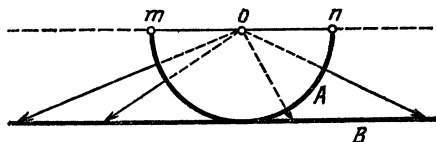


Рис. 7.

В свою очередь полуокружность гомеоморфна отрезку (ее можно распрямить). Следовательно, *прямая гомеоморфна открытому отрезку* (т. е. отрезку, из которого выброшены концевые точки).

Задачи

8. Докажите, что фигура, являющаяся объединением боковой поверхности цилиндра и его нижнего основания («стакан»), гомеоморфна кругу.

9. Докажите, что плоскость гомеоморфна открытому кругу (т. е. кругу, к которому не причисляются точки ограничивающей его окружности), а также сфере, из которой «выколота» (удалена) одна точка.

10. Докажите, что фигуры, изображенные на рис. 8 (лента, гомеоморфная боковой поверхности цилиндра, и дважды перекрученная лента) гомеоморфны между собой *).

Поучительно сравнить понятие гомеоморфизма и понятие конгруэнтности фигур. В геометрии рассматриваются отображения, сохраняющие расстояния между точками. Они называются *движениями* (или перемещениями). В результате движения каждая фигура перекладывается на новое место как твердое целое, без изменения расстояний. Две фигуры, которые переводятся одна в другую («совмещаются») с помощью движения, называются *конгруэнтными* и рассматриваются как одинаковые, как не отличающиеся (с геометрической точки зрения) друг от друга. В топологии рассматриваются отображения, более общие, чем движения, а именно гомеоморфные отображения. Две гомеоморфные между собой фигуры рассматриваются (с топологической точки зрения) как одинаковые, не отличающиеся друг от друга. *Те свойства фигур, которые не изменяются при гомеоморфных отображениях, называются топологическими свойствами фигур, или топологическими инвариантами* (от латинского слова *invariant* — неизменный). Изучением топологических свойств фигур и занимается *топология*.

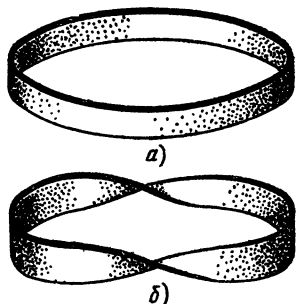


Рис. 8.

Задачи

11. Если фигура A состоит лишь из конечного числа точек, то через $n(A)$ обозначим число ее точек; если же фигура A содержит бесконечно много точек, то условимся писать $n(A) = \infty$. Является ли $n(A)$ топологическим инвариантом?

12. Фигура A называется *вложимой в плоскость*, если она гомеоморфна некоторой фигуре, лежащей в плоскости. Например, «стакан» (задача 8) вложим в плоскость. Является ли свойство фигуры быть вложимой в плоскость топологическим инвариантом?

* На рис. 8 (и следующих) поверхности изображены «толстыми», т. е. как бы изготовленными из некоторого материала. Читатель должен иметь в виду, что это сделано только для наглядности, и должен представлять себе «математические» поверхности, не имеющие толщин.

Не следует думать, что любые две гомеоморфные между собой фигуры можно перевести одну в другую, изгибая, растягивая и перемещая их (без разрывов и склеиваний) в пространстве. Например, фигуры, изображенные на рис. 8, нельзя перевести одну в другую таким способом, они «неодинаково расположены» в пространстве. Верхнюю ленту нужно разрезать и затем, дважды перекрутив, снова склеить по тем же самым точкам; лишь после этого ее удастся совместить со второй лентой. Этот прием (разрезание фигуры, а затем, после надлежащего растяжения, перемещения ее частей — обратное склеивание) часто используется в топологии для доказательства гомеоморфности двух фигур.

«Одинаковость расположения» двух фигур в пространстве (или в объемлющей их фигуре) уточняется понятием *изотопии*. Говорят, что две гомеоморфные фигуры A и B *изотопны* в объемлющей их фигуре P (или, иначе, *топологически одинаково расположены* в P), если существует гомеоморфное отображение фигуры P на себя, при котором фигура A переходит в B . Ленты на рис. 8 гомеоморфны, но не изотопны друг другу в пространстве (доказательство этого будет дано ниже). О свойствах расположения можно говорить, если задана пара фигур: фигура A и объемлющая ее фигура P . Изучением свойств расположения (т. е. изучением топологических инвариантов пары фигур) также занимается топология.

Задачи

13. Линия A (рис. 9) не разрезает тор T на две части, а линия C разрезает. Изотопны ли A и C в фигуре T ? Изотопны ли A и C в трехмерном пространстве?

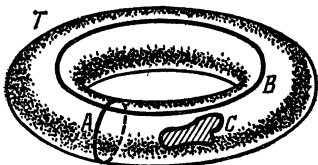


Рис. 9.



Рис. 10.

14. Докажите, что меридиан A и параллель B тора T (см. рис. 9) изотопны в T .

15. Докажите, что в фигуре восьмерки (рис. 10) любые две точки, отличные от x , изотопны.

3. Простейшие топологические инварианты

Выше (пример 4) мы говорили, что поверхность шара (т. е. сфера) не гомеоморфна тору, и вряд ли у читателя возникло сомнение в этом. Но как доказать, что две фигуры не являются гомеоморфными? Ведь из того, что мы не сумели и найти гомеоморфного отображения одной фигуры на другую, не вытекает еще с достоверностью, что такого гомеоморфного отображения не существует.

Для доказательства того, что две фигуры не гомеоморфны друг другу, пользуются *топологическими инвариантами*. Пусть, например, с помощью некоторого правила каждой фигуре ставится в соответствие определенное число, причем так, что числа, соответствующие двум гомеоморфным фигурам, всегда оказываются равными. Тогда это число выражает некоторое свойство фигуры, сохраняющееся при гомеоморфных отображениях, т. е. являющееся топологическим инвариантом. Если теперь две фигуры A и B таковы, что соответствующие им числа оказались различными, то эти фигуры не могут быть гомеоморфными.

Пример 7. Буква \mathcal{B} представляет собой фигуру, состоящую из двух «кусков», из двух не связанных между собой частей. Остальные буквы русского алфавита, кроме \mathcal{H} , \mathcal{E} , состоят из одного связного куска. Число связных «кусков», из которых состоит фигура (говорят также: *число компонент* фигуры), является топологическим инвариантом; если две фигуры гомеоморфны, то обе они состоят из одинакового числа компонент. Поэтому буква \mathcal{B} не гомеоморфна, например, букве \mathcal{O} , букве $\mathcal{П}$, букве $\mathcal{Ц}$ и т. д.

Пример 8. На фигуре восьмерки (см. рис. 10) имеется такая точка x , что после удаления из восьмерки точки x вместе с близлежащими точками (рис. 11) мы получаем

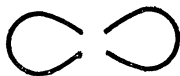


Рис. 11.

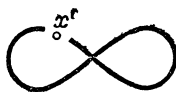


Рис. 12.

несвязную фигуру (содержащую более одной компоненты). Точку, обладающую этим свойством, называют *разбивающей точкой* фигуры. Никакая отличная от x точка x' восьмерки не является разбивающей (рис. 12).

Понятия «разбивающая точка», «неразбивающая точка» топологически инвариантны: если x есть разбивающая точка фигуры A , а $f: A \rightarrow B$ — гомеоморфное отображение, то $f(x)$ есть разбивающая точка фигуры B . Поэтому число разбивающих точек данной фигуры есть ее топологический инвариант, число неразбивающих точек — также топологический инвариант.

Задачи

16. Для каждой из букв русского алфавита укажите, сколько разбивающих и неразбивающих точек она содержит. Докажите, что буквы О, Г, Т, Б попарно не гомеоморфны.

17. Докажите, что для любого натурального n существует фигура, содержащая ровно n разбивающих точек, а также фигура, содержащая ровно n неразбивающих точек.

Пример 9. Пусть A — некоторая фигура, составленная из конечного числа дуг, и x — ее точка. Число дуг фигуры A , сходящихся в точке x , называется *индексом* точки x в фигуре A . В фигуре буквы Ж (рис. 13) точка a имеет индекс 1, точка b имеет индекс 2, точка c — индекс 3, а точка d — индекс 4. Число точек индекса 1, содержащихся в фигуре A , число точек индекса 3, индекса 4 и т. д. — все это различные топологические инварианты фигуры A .

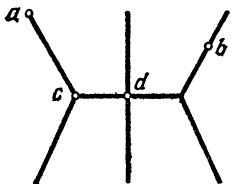


Рис. 13.

Задачи

18. Докажите, что буквы Ю и Ф не гомеоморфны.

19. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при выполнении которого фигура, составленная из конечного числа дуг, гомеоморфна окружности.

Фигуры, состоящие из конечного числа дуг, называют в топологии *конечными графами*. В конечном графе имеется конечное число *вершин* и некоторые из этих точек соединяются непересекающимися дугами (*ребрами* графа); при этом две вершины графа можно соединять несколькими ребрами и, кроме того, допускаются замкнутые ребра («петли»), которые начинаются и кончатся в одной и той же вершине.

Задачи

20. Пусть G — конечный граф. Через $a_k(G)$ обозначим число вершин этого графа, имеющих индекс k . Докажите, что число ребер графа G равно $\frac{1}{2}(a_1(G) + 2a_2(G) + 3a_3(G) + \dots)$.

21. Докажите, что во всяком конечном графе число вершин, имеющих нечетный индекс, четно.

Пример 10. Граф называется *уникурсальным*, если его можно «нарисовать одним росчерком», т. е. пройти его весь непрерывным движением, не проходя одно и то же ребро дважды. Свойство графа быть уникурсальным является, очевидно, топологически инвариантным. Однако этот топологический инвариант не является новым, а выражается через понятие индекса точки (см. задачу 24). ✓

Задачи

22. Докажите, что если каждая вершина конечного графа имеет индекс, не меньший двух, то этот граф содержит линию, гомеоморфную окружности и составленную из ребер графа.

23. Докажите, что если все вершины конечного связного графа имеют четный индекс, то этот граф можно «нарисовать одним росчерком», начав движение из произвольно заданной его вершины и возвращаясь в ту же вершину.

24. Докажите, что связный граф тогда и только тогда уникурсален, когда он содержит не более двух вершин нечетного индекса.

С уникурсальными графами тесно связана задача о кенигсбергских мостах, рассмотренная еще Эйлером. В то время в Кенигсберге (ныне Калининград областной) было 7 мостов (рис. 14) через реку Прегель. Вопрос состоит в том, можно ли, прогуливаясь по городу, пройти

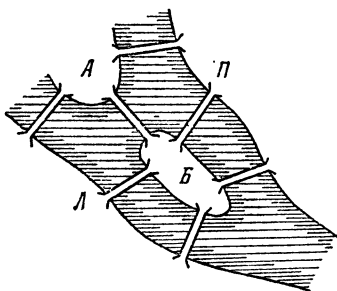


Рис. 14.

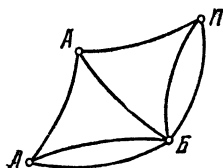


Рис. 15.

через каждый мост точно по одному разу. Сопоставим с планом города некоторый граф: вершина $Л$ обозначает левый берег, $П$ — правый берег, $А$ и $Б$ острова, а ребра графа соответствуют мостам (рис. 15). В этом графе все четыре вершины имеют нечетный индекс. Следовательно, граф не уникурсален, и потому требуемого маршрута прогулки не существует.

Задачи

25. Докажите, что, добавив еще один мост (где угодно на плане рис. 14), мы получим схему города, в котором можно пройти через каждый мост точно по одному разу.

26. *Полным графом* называется конечный граф без петель, у которого любые две вершины соединены точно одним ребром. В каком случае полный граф уникурсален?

4. Эйлерова характеристика графа

Всякий граф можно постепенно «построить», добавляя одно ребро за другим. Например, можно в требуемом графе перенумеровать заранее все ребра, а затем вычерчивать последовательно первое ребро, второе, третье и т. д.

Пример 11. На рис. 16 показан граф, который мы хотим построить, и выбрана нумерация его ребер (некоторые ребра прерваны, чтобы показать наглядно их возможное расположение в пространстве).

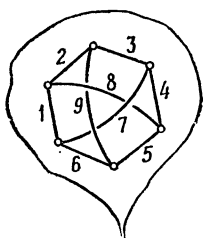


Рис. 16.

Нумерация ребер на рис. 16 выбрана так, что при последовательном вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются **связные** графы. Если бы, однако, мы занумеровали ребра в обратном порядке, то при вычерчивании у нас получился бы **несвязный** граф, содержащий три отдельно взятых ребра, и лишь потом, при вычерчивании новых ребер, мы получили бы связный граф. Естественно возникает вопрос: во всяком ли **связном** графе существует такая нумерация ребер,

что при последовательном вычерчивании графа (в соответствии с этой нумерацией) все время получаются **связные** графы?

Ответ на этот вопрос утвердителен (см. задачу 28). Иначе говоря, *всякий связный граф может быть получен следующим образом: мы берем одно ребро, затем присоединяем к нему еще одно ребро так, чтобы снова получился связный граф, затем присоединяем еще одно ребро (так, чтобы снова получился связный граф) и т. д.* Это утверждение можно назвать «теоремой о вычерчивании связных графов».

Задачи

27. Докажите, что любой связный граф можно вычертить «одним росчерком», если разрешить проходить каждое ребро точно два раза.

28. Выведите из предыдущей задачи доказательство теоремы о вычерчивании связного графа.

29. Докажите, что любые две вершины связного графа G можно соединить в G простой цепочкой ребер, т. е. такой, что объединение ребер этой цепочки гомеоморфно отрезку.

У к а з а н и е: если цепочка ребер, соединяющая a и b , дважды проходит через некоторую вершину c , то она содержит «замкнутую цепочку» (начинающуюся и кончающуюся в c), которую можно удалить.

30. Докажите, что если любые две вершины графа G можно соединить не менее чем двумя различными простыми цепочками, то граф G не имеет вершин индекса 1. Верна ли обратная теорема?

Контуром в графе называется замкнутая цепочка ребер, объединение которых представляет собой линию, гомеоморфную окружности (рис. 17). Связный граф, не содержащий ни одного контура, называется *деревом*

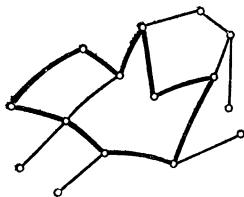


Рис. 17.

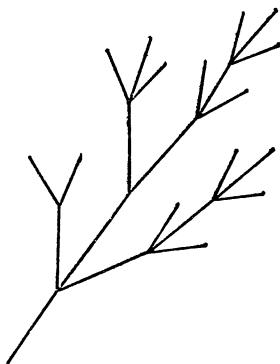


Рис. 18.

(рис. 18). Мы докажем, что для любого дерева, имеющего B вершин и P ребер, справедливо соотношение

$$B - P = 1. \quad (4)$$

Для доказательства проведем индукцию по числу ребер P . При $P = 1$ (дерево имеет одно ребро и две вершины) соотношение (4) справедливо. Предположим, что для любого дерева, имеющего n ребер, соотношение (4) уже доказано, и пусть G — дерево, имеющее $n + 1$ ребро. Так как граф G связан, то его можно получить из некоторого связного графа G' добавлением одного ребра r (это вытекает из «теоремы о вычерчивании связного графа»). Граф G' содержит n ребер и тоже не содержит контуров, т. е. является деревом. По предположению индукции для

дерева G' соотношение (4) справедливо, и потому в G' имеется $n + 1$ вершина. Заметим теперь, что только один конец добавляемого ребра r является вершиной графа G' (в противном случае, взяв в G' простую цепочку, соединяющую вершины a и b , и добавив к этой цепочке ребро r , мы получили бы контур в графе G ; рис. 19). Следовательно, при добавлении ребра r в графе G появляется одно новое ребро и одна новая вершина (рис. 20). Иначе говоря, граф G имеет $n + 2$ вершины

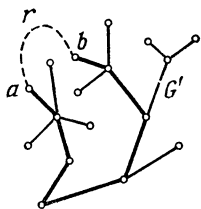


Рис. 19.

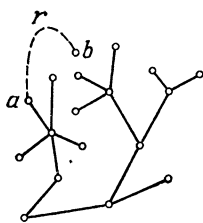


Рис. 20.

и $n + 1$ ребро, и потому соотношение (4) для него справедливо. Проведенная индукция доказывает равенство (4) для любого дерева.

Разность $V - P$, где V — число вершин, а P — число ребер графа G , называется *эйлеровой характеристикой* этого графа и обозначается через $\chi(G)$. Таким образом, *эйлерова характеристика любого дерева равна 1*.

Задачи

31. Граф, не содержащий контуров, называется *лесом*. Докажите, что если G — лес, то число деревьев, которые «растут» в нем (т. е. число компонент графа G), равно $\chi(G)$.

32. Докажите, что если G — дерево, то каждые две его вершины соединены только одной простой цепочкой. Верно ли обратное?

Пусть теперь G — связный граф, не являющийся деревом. Тогда в G имеется контур; пусть r_1 — какое-либо ребро, входящее в этот контур (рис. 21). Удалив из G ребро r_1 , мы получим связный граф G' (поскольку концы выброшенного ребра r_1 соединены в G' простой цепочкой — оставшейся частью контура), причем вершины у графа G' — те же, что и у G . Если G' еще не является деревом, т. е. в G' также есть контур (рис. 22), то мы можем взять произвольное ребро r_2 этого контура и, выбросив его, получить связный граф G'' с теми же вершинами, что и у G , и т. д. После

выбрасывания какого-то ребра r_k мы получим связный граф G^* , содержащий все вершины графа G и уже не имеющий контуров, т. е. являющийся деревом. Оно называется *максимальным деревом* графа G , а ребра r_1, r_2, \dots, r_k называются *перемычками*.

Если V — число вершин графа G , то максимальное дерево G^* имеет те же V вершин. Согласно (4) G^* имеет $V - 1$ ребро, и потому число ребер графа G равно $V - 1 + k$ (чтобы из G^* получить G , надо «возвратить» k

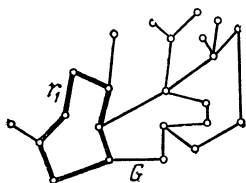


Рис. 21.

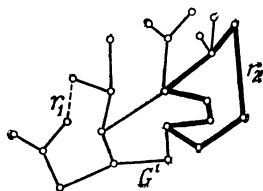


Рис. 22.

выброшенных ребер-перемычек). Следовательно,

$$\chi(G) = V - (V - 1 + k) = 1 - k. \quad (5)$$

Так как $k \geq 1$, то $\chi(G) \leq 0$. Таким образом, для любого связного графа G справедливо соотношение $\chi(G) \leq 1$; равенство достигается в том и только в том случае, если G — дерево.

Далее, согласно (5) число перемычек $k = 1 - \chi(G)$. Иначе говоря, для получения графа G надо к его максимальному дереву добавить $1 - \chi(G)$ ребер-перемычек, каждое из которых соединяет две (возможно, совпадающие) вершины максимального дерева.

Задачи

33. Если связный граф G получается из некоторого дерева добавлением нескольких замкнутых ребер («петель»), то в G имеется единственное максимальное дерево. Верно ли обратное?

34. Докажите, что если граф G содержит l компонент, то $\chi(G) \leq l$. В каком случае достигается равенство?

35. Будем говорить, что в графе G задана система токов, если каждому ребру сопоставлено направление и неотрицательное число (ток), причем выполняется *правило Кирхгофа*: для каждой вершины сумма входящих в нее токов равна сумме исходящих. Докажите, что если G — дерево, то в нем существует только тривиальная система токов (все токи равны нулю).

36. Пусть G — связный граф, G^* — его максимальное дерево, а r_1, r_2, \dots, r_k — перемычки. Докажите, что если произвольно задать токи на ребрах r_1, r_2, \dots, r_k , то их можно однозначно

дополнить токами на остальных ребрах так, чтобы получилась система токов в G .

Указание. Для каждой перемычки r_i существует единственный контур, содержащий ее и не содержащий других перемычек. Если пустить по этому контуру ток такой величины и направления, как указано на перемычке r_i , а затем взять сумму всех этих «контурных токов», то мы и получим требуемую систему токов на графе G . Если бы существовали две различные системы токов, совпадающие на перемычках, то их разность была бы нетривиальной системой токов на дереве G^* .

5. Индекс пересечения

В следующих двух примерах рассматриваются графы, не вложимые в плоскость.

Пример 12 («домики и колодцы»). На плоскости даны шесть точек D_1, D_2, D_3 (домики) и K_1, K_2, K_3 (колодцы); можно ли на плоскости провести тропинки от каждого домика к каждому колодцу, так чтобы никакие две тропинки не пересекались? Ответ отрицательный: если мы проведем все тропинки, кроме одной (рис. 23), то для последней

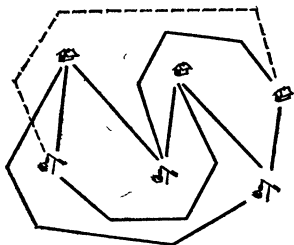


Рис. 23.

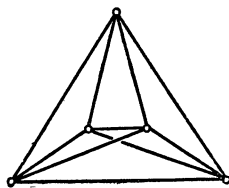


Рис. 24.

тропинки уже «не будет места» на плоскости. Таким образом, граф P_1 , изображенный на рис. 23, не вложим в плоскость.

Пример 13. Обозначим через P_2 полный граф с пятью вершинами. На рис. 24 одно ребро прервано: для него «нет места» на плоскости. Таким образом, граф P_2 также не вложим в плоскость.

Интересно отметить, что построенные графы P_1, P_2 являются «эталоном» графов, не вложимых в плоскость: если граф не вложим в плоскость, то он обязательно содержит граф, гомеоморфный P_1 или P_2 . Это было доказано польским математиком К. Куратовским

Задачи

37. Докажите, что граф, рассмотренный в примере 11 (рис. 16), не вложим в плоскость.

38. Ребрами графа служат стороны и наименьшие диагонали *) правильного n -угольника. Докажите, что при четном n этот граф может быть вложен в плоскость, а при нечетном — нет.

39. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали *) правильного $2n$ -угольника. Докажите, что при $n \geq 3$ этот граф не вложим в плоскость, но его можно расположить на торе.

40. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали *) правильного $(2n + 1)$ -угольника. Докажите, что при $n \geq 2$ этот граф не вложим в плоскость. Можно ли его расположить на торе?

Рассуждения, приведенные в примерах 12 и 13 («нет места» на плоскости), конечно, являются не доказательствами, а лишь пояснениями. Ниже мы изложим строгое доказательство того, что графы P_1 , P_2 не вложимы в плоскость.

Пусть a , b — два отрезка на плоскости, ни один из которых не содержит концевых точек другого отрезка. Если эти отрезки пересекаются, то будем писать $J(a, b) = 1$, а если нет, то $J(a, b) = 0$. Число $J(a, b)$ назовем *индексом пересечения отрезков a и b* .

Конечное множество отрезков на плоскости будем называть *цепью*. Отрезки, составляющие цепь, назовем ее *звеньями*, а точки, являющиеся концами звеньев, — *вершинами*.

Пусть x и y — две такие цепи, что ни одна из них не содержит ни одной вершины другой цепи. Отрезки, составляющие цепь x , обозначим через a_1, \dots, a_m , а отрезки, составляющие цепь y , — через b_1, \dots, b_n . Если сумма $\sum_{i,j} J(a_i, b_j)$ (т. е. сумма индексов пересечения каждого из отрезков a_1, \dots, a_m с каждым из отрезков b_1, \dots, b_n) *четна*, то будем писать $J(x, y) = 0$, а если эта сумма *нечетна*, то $J(x, y) = 1$. Число $J(x, y)$ назовем *индексом пересечения цепей x и y* (точнее, индексом пересечения по модулю 2).

Цепь, в каждой вершине которой сходится *четное* число звеньев, будем называть *циклом* (по модулю два). Мы докажем, что *индекс пересечения двух циклов на плоскости всегда равен нулю*.

В самом деле, так как каждая вершина цикла имеет индекс, не меньший двух, то этот цикл содержит ломаную, гомеоморфную окружности (см. задачу 17 на с. 22). Если

*) Слегка приподнятые над плоскостью, чтобы они попарно не пересекались.

из цикла выбросить эту замкнутую ломаную, то останется снова цикл (каждая вершина имеет четный индекс). В оставшемся цикле можно снова выделить ломаную, гомеоморфную окружности, и т. д. Итак, *каждый цикл можно представить как объединение конечного числа ломаных, гомеоморфных окружности (причем эти ломаные попарно не имеют общих отрезков).*

Поэтому для доказательства того, что индекс пересечения двух циклов x , y на плоскости всегда равен нулю, достаточно установить это в случае, когда каждый из циклов x , y представляет собой ломаную, гомеоморфную окружности. Сдвинув чуть-чуть вершины циклов x и y (что не изменит их индекс пересечения), мы можем добиться того, чтобы звенья, составляющие циклы x и y , были попарно не параллельными. Выберем теперь прямую l , не параллельную ни одной прямой, соединяющей какую-либо вершину цикла x с какой-либо вершиной цикла y .

Будем непрерывно перемещать цикл x (как твердое целое) параллельно прямой l (рис. 25). Индекс пересечения $J(x, y)$ мог бы изменяться лишь в те моменты, когда вершины одного из циклов x , y попадают на стороны другого

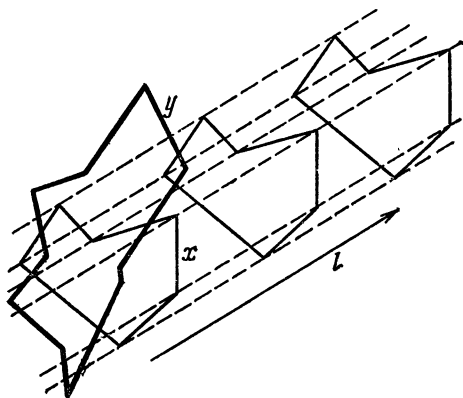


Рис. 25.

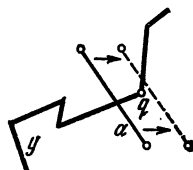


Рис. 26.

(вершины цикла x не могут попасть в вершины цикла y в силу выбора прямой l). Однако в момент, когда некоторое звено a цикла x проходит через вершину q цикла y , число точек пересечения не меняет своей четности (рис. 26—28). То же происходит и при прохождении вершин цикла x через стороны цикла y . Поэтому индекс

пересечения $J(x, y)$ не меняется. Но в конце концов цикл x попадает в положение, в котором он не имеет общих точек с y (рис. 25), так что индекс пересечения становится равным нулю. Следовательно, и первоначально было $J(x, y) = 0$.

Теперь мы в состоянии доказать, что граф P_1 (пример 12), не вложим в плоскость. Две тропинки, ведущие от разных домиков к разным колодцам, условимся называть *несмежными*. Проведем (в виде ломаных линий) все требуемые тропинки (возможно, с пересечениями) и обозначим через I число точек пересечения по всем парам несмежных тропинок. Мы покажем, что при любом способе проведения тропинок число I нечетно.

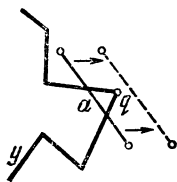


Рис. 27.

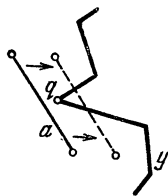


Рис. 28.

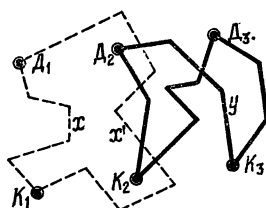


Рис. 29.

Предположим, что мы меняем положение одной тропинки, скажем, тропинки D_1K_1 . Первоначальное ее положение обозначим через x , а новое — через x' (рис. 29). Несмежными с D_1K_1 являются четыре тропинки, соединяющие два оставшихся домика D_2, D_3 с двумя оставшимися колодцами K_2, K_3 . Они образуют цикл $D_2K_2D_3K_3D_2$, который мы обозначим через y . Ломаные x и x' , вместе взятые, также образуют цикл. Так как индекс пересечения любых двух циклов равен нулю, то $J(x, y) = J(x', y)$. Иначе говоря, число точек пересечения тропинки x с циклом y (т. е. со всеми несмежными ей тропинками) имеет ту же четность, что и число точек пересечения тропинки x' с циклом y . Таким образом, при замене тропинки x тропинкой x' число I не меняет своей четности.

Но тогда ясно, что для любых двух расположений тропинок на плоскости число I имеет одну и ту же четность. Действительно, последовательно заменяя сначала одну тропинку первого расположения соответствующей тропинкой второго расположения, затем еще одну и т. д., мы постепенно заменим первое расположение тропинок

вторым, а четность числа I , в силу доказанного, меняться не будет.

На рис. 23 имеется только одна точка пересечения тропинок, а потому для любого расположения тропинок число I нечетно. Следовательно, провести все тропинки без пересечений (т. е. так, чтобы было $I = 0$) невозможно, и потому граф P_1 не вложим в плоскость.

Задачи

41. Докажите, что граф P_2 , рассмотренный в примере 13 (с. 22), не вложим в плоскость.

42. Докажите, что на сфере (как и на плоскости) индекс пересечения любых двух циклов равен нулю. Покажите, что на торе существуют два цикла, индекс пересечения которых равен 1.

Пусть теперь a и b — два направленных отрезка, ни один из которых не содержит концов другого отрезка. Если, идя по направлению первого отрезка a , мы увидим, что второй отрезок b пересекает его справа налево, то будем писать $J(a, b) = 1$; если слева направо, то $J(a, b) = -1$; наконец, если a и b не пересекаются, то $J(a, b) = 0$. Число $J(a, b)$ будем называть индексом пересечения направленных отрезков a и b .

Цепью (точнее, «целочисленной цепью») — в отличие от цепей по модулю 2, рассматривавшихся ранее) будем теперь называть конечное множество направленных отрезков на плоскости. Индекс пересечения целочисленных цепей x, y (рассматриваемых в определенном порядке: x — первая цепь; y — вторая) определяется, как и прежде:

$$J(x, y) = \sum_{i,j} J(a_i, b_j),$$

где a_1, \dots, a_m — направленные отрезки, составляющие цепь x , а b_1, \dots, b_n — направленные отрезки, составляющие цепь y .

Наконец, цепь условимся называть циклом (точнее, целочисленным циклом), если для каждой вершины число входящих в нее направленных отрезков равно числу исходящих.

Задачи

43. Направленным контуром условимся называть замкнутую ломаную, гомеоморфную окружности, на звеньях которой отмечено стрелками некоторое направление обхода (так, что в каждой вершине имеется одно входящее звено и одно исходящее).

Направленный контур является циклом. Докажите, что всякий цикл (целочисленный) можно представить как объединение конечного числа направленных контуров, которые попарно не имеют общих звеньев.

44. Докажите, что индекс пересечения любых двух целочисленных циклов равен нулю.

45. На рис. 30 цикл x состоит из двух отдельных направленных контуров. Докажите, что точка a в том и только в том случае принадлежит внешней области кольца, если для любой направленной ломаной y , идущей от o к a , выполнено условие $J(x, y) = 2$. В каком случае точка a лежит внутри заштрихованной кольцевой области?

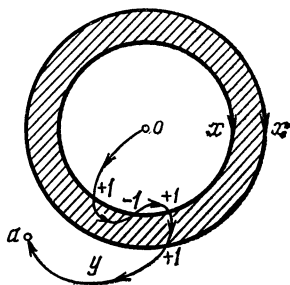


Рис. 30.

6. Теорема Жордана

Выше (см. рис. 25—28) мы доказали, что индекс пересечения любых двух циклов на плоскости равен нулю. Возможно, читатель готов предложить более простое доказательство: в каждой точке пересечения замкнутая ломаная x либо входит во внутреннюю область замкнутой ломаной y , либо выходит из внутренней области во внешнюю; так как число точек входа равно числу точек выхода (поскольку они чередуются), то общее число точек пересечения четно.

Однако это доказательство можно признать корректным, если уже выяснен смысл понятия «внутренняя область», а это понятие вовсе не является таким простым, как кажется на первый взгляд. Выяснению его и посвящен этот пункт.

Замкнутая линия, гомеоморфная окружности, называется *простой замкнутой линией*. Теорема Жордана состоит в том, что *всякая простая замкнутая линия, расположенная на плоскости, разбивает эту плоскость на две области* (внутреннюю и внешнюю). Поясним смысл этой теоремы. Возьмем две точки, p и q , не лежащие на простой замкнутой линии l . Если p и q можно соединить ломаной, не пересекающей l , то считают, что точки p и q лежат в одной и той же области относительно линии l . Если же любая ломаная, соединяющая p и q , пересекает l , то считают, что p и q лежат в разных областях. Теорема Жордана утверждает, что линия l определяет на плоскости две области. Кажущаяся «очевидность» теоремы Жордана объясняется лишь тем, что мы имеем

в виду очень простые линии (окружность, контур выпуклого многоугольника и т. п.).

Пример 14. На рис. 31 изображена простая замкнутая ломаная. Однако вовсе не «очевидно», что она разрезает плоскость на две области; не сразу можно понять, в какой области (внутренней или внешней) лежат точки a , b , c , d .

Приведем доказательство теоремы Жордана. При этом ограничимся случаем, когда l — не произвольная простая

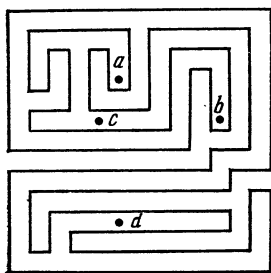


Рис. 31.

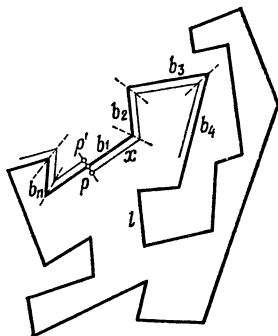


Рис. 32.

замкнутая линия на плоскости, а простая замкнутая л о м а н а я.

Пусть b_1, b_2, \dots, b_n — последовательные звенья ломаной l . Возьмем точки p, p' , симметричные относительно звена b_1 . Через точку p проведем отрезок, параллельный звену b_1 , до точки пересечения с биссектрисой угла между звеньями b_1 и b_2 (рис. 32). Из этой точки проведем отрезок, параллельный b_2 , до пересечения с биссектрисой угла между b_2 и b_3 и т. д. В результате мы получим ломаную x , звенья которой находятся на одном и том же расстоянии от соответствующих звеньев ломаной l . Если при этом расстояние $|pp'|$ достаточно мало, то линия x не пересекает линии l и, обойдя вокруг нее, должна вернуться либо в точку p , либо в p' . Однако в точку p' ломаная x прийти не может: если бы она соединяла точки p и p' , то, присоединив к x отрезок pp' , мы получили бы цикл, который с циклом l пересекается в единственной точке, т. е. индекс пересечения этих двух циклов был бы равен 1, что невозможно. Итак, x представляет собой замкнутую ломаную, один раз обходящую ло-

маную l . Аналогично получается ломаная x' , выходящая из p' , один раз обходящая l и возвращающаяся в p' .

Пусть теперь c — произвольная точка, не лежащая на линии l . Тогда ее можно соединить, не пересекая l , либо с p , либо с p' : мы можем провести из точки c луч, пересекающий линии x, x' , и от точки c пройти до первой точки пересечения этого луча с какой-либо из линий x, x' , а затем по этой линии дойти до точки p или p' .

Нетрудно понять, что если из точки c проведены две различные ломаные y, z , не пересекающие l и оканчивающиеся в p или p' , то обе они оканчиваются в одной и той же точке. В самом деле, если бы они оканчивались в разных точках (рис. 33), то ломаная $y \cup z$ вместе с отрезком pp' составляла бы цикл, индекс пересечения которого с циклом l равен 1, что невозможно.

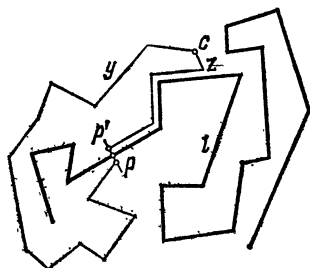


Рис. 33.

Обозначим теперь через U множество всех точек плоскости, которые можно, не пересекая l , соединить с точкой p , а через V — множество точек, которые можно, не пересекая l , соединить с p' . Тогда U, V и будут теми двумя областями, на которые, как утверждает теорема Жордана, линия l разбивает плоскость. В самом деле, если точки s_1, s_2 принадлежат одной области (скажем, U), то существуют ломаные y_1, y_2 , не пересекающие l , которые соединяют s_1, s_2 с точкой p . Объединение их представляет собой ломаную, соединяющую s_1 и s_2 и не пересекающую l . Итак, две точки, принадлежащие одной области, можно соединить ломаной, не пересекающей l . Если же точки s_1, s_2 принадлежат различным областям, то их нельзя соединить ломаной, не пересекающей l (иначе, как и выше, мы получили бы цикл, имеющий с l индекс пересечения 1).

Заметим, что все «далекие» точки плоскости расположены в одной и той же области относительно линии l . Поэтому одна из двух областей, определяемых линией l , — неограниченная, а другая — ограниченная. Неограниченную область называют *внешней*, а ограниченную — *внутренней*.

Задачи

46. Если ломаная l сложная (см. рис. 31), то трудно определить «на глаз», во внутренней или внешней области лежит точка s (т. е. можно ли, отправляясь из s , выйти из «лабиринта», образованного линией l). Докажите, что если луч, исходящий из точки s и не проходящий через вершины ломаной l , пересекает l в четном числе точек, то s лежит во внешней области, а если в нечетном, то во внутренней.

47. Докажите, что всякая простая замкнутая линия на сфере разбивает сферу на две области.

48. На плоскости проведены k ломаных линий, каждая из которых соединяет две заданные точки p и q . Докажите, что если других общих точек ломаные попарно не имеют, то плоскость разбита на k областей.

Укажем (без доказательства), что любые две простые замкнутые линии l_1, l_2 на плоскости изотопны между собой, т. е. существует гомеоморфное отображение плоскости на себя, которое переводит l_1 в l_2 . Это предложение отчасти является от теоремы Жордана, оно утверждает нечто большее. В самом деле, пусть l_1 — окружность, а l_2 — произвольная простая замкнутая линия на плоскости. Гомеоморфное отображение плоскости на себя, переводящее l_1 в l_2 , переводит внешнюю область окружности l_1 во внешнюю область линии l_2 , а внутреннюю область окружности l_1 (т. е. открытый круг) — во внутреннюю область линии l_2 . Таким образом, объединение простой замкнутой линии l_2 и ее внутренней области гомеоморфно кругу. Теорема Жордана об этом ничего не говорит, утверждая лишь существование двух областей, внутренней и внешней.

7. Что такое линия?

Евклид определяет линию как «длину без ширины». Это, конечно, не определение, а лишь наглядное описание линий. Следующий пример показывает, однако, что это описание вряд ли можно считать удачным.

Пример 15. Возьмем квадрат площади 1 (рис. 34, а) и выбросим из него крест (рис. 34, б), причем ширину полосок креста подберем так, чтобы площадь креста была равна $1/4$. В каждом из оставшихся квадратов снова вырежем по кресту (рис. 34, в), причем так, чтобы сумма площадей крестов была равна $1/8$. В каждом из оставшихся 16 маленьких квадратов вновь выбросим по кресту (рис. 34, г) так, чтобы сумма площадей выбрасываемых

кусков была равна $1/16$, и т. д. Обозначим через A «предельную фигуру», т. е. пересечение $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$, где A_n —фигура, которая остается после проведения n этапов построения. Фигура A как бы «рассыпается» на отдельные точки (ибо остающиеся квадратики делаются все меньше) и тем не менее имеет **п о л о ж и т е л ь н у ю** площадь. В самом деле, сначала мы **выбро-**

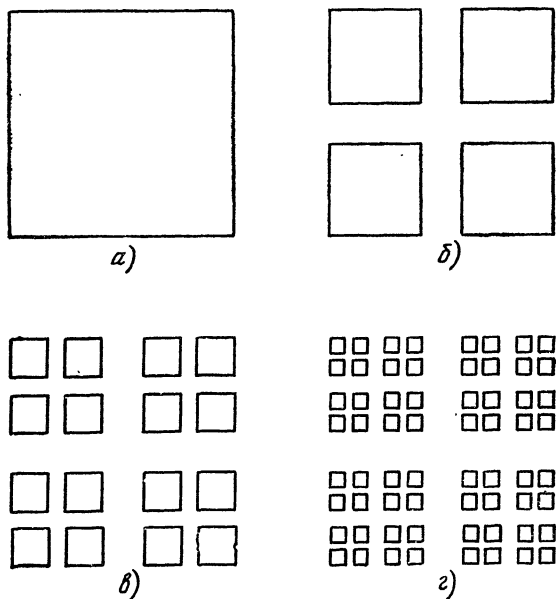


Рис. 34.

сили из квадрата $1/4$ его площади, затем $1/8$, затем $1/16$ и т. д. В пределе у нас остается фигура A , имеющая площадь $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right)$. Так как сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии, записанной в скобках, равна $1/2$, то площадь предельной фигуры A равна $1/2$.

Построим теперь *простую дугу* (т. е. фигуру, гомеоморфную отрезку), которая проходит через все точки множества A . Для этого возьмем изогнутую полоску, содержащую четыре квадрата, полученных на первом этапе построения (рис. 35, а). Затем сделаем полоску более узкой и изогнутой, так что она будет содержать все квадра-

ты, полученные на втором этапе (рис. 35, б), затем на третьем (рис. 35, в) и т. д.

После n этапов этого построения мы получаем полосу B_n , которая содержится в предыдущих полосках и содержит фигуру A_n (а следовательно, и фигуру A). Пересечение $B_1 \cap B_2 \cap \dots$ этих полосок, т. е. их «предельную фигуру», обозначим через B ; она также содержит A , и потому площадь фигуры B не меньше $1/2$. Рис. 35 наглядно

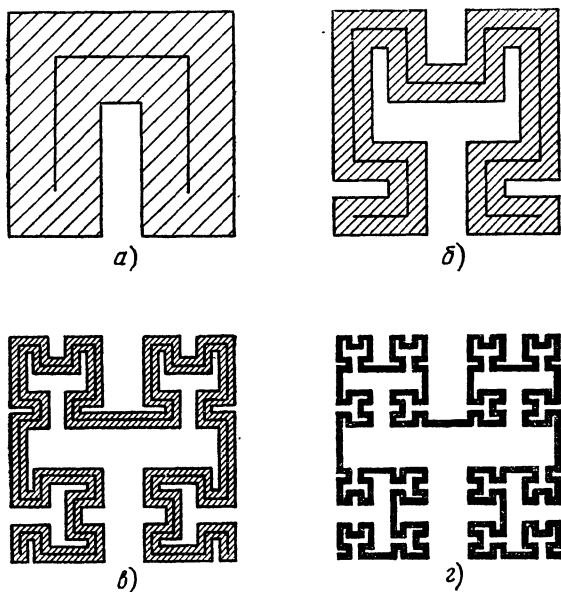


Рис. 35.

показывает, что B является чрезвычайно «извилистой» линией (простой дугой). Эта линия имеет положительную площадь, т. е. вряд ли может быть названа «длинной без ширины».

Евклид дает также описание линии как «границы поверхности». Однако и понятие «граница», как мы сейчас увидим, таит в себе много неожиданного. Мы привыкли считать, что к каждому участку линии плоскость примыкает «с двух сторон». Например, если l — простая замкнутая линия, то обе области, U и V , определяемые линией l , примыкают к ней на всем ее протяжении (т. е.

как угодно близко к любой точке $x \in l$ имеются и точки области U и точки области V).

Кажется «наглядно очевидным», что линия не может быть совместной границей более чем двух областей на плоскости, которые примыкают к этой линии на всем ее протяжении. Однако здесь интуиция нас обманывает.

Пример 16. Покажем, что на плоскости существует линия, являющаяся *совместной границей трех областей*. Такие линии обнаружил японский математик Вада.

Предположим, что имеется окруженная морем земля и на ней два озера: теплое и холодное. Для подведения воды от озер и моря к суше проводятся каналы. В первый день от теплого озера отводится канал (не сообщающийся с морской водой и водой холодного озера) так, чтобы не далее чем на расстоянии 1 от каждой точки суши была вода теплого озера (рис. 36). Во второй день канал отводится от холодного озера, причем он нигде не сообщается с морем, теплым озером и построенным на день раньше каналом, и работа продолжается до тех пор, пока от каждой точки оставшейся суши не далее чем на расстоянии 1 будет вода холодного озера. В третий день канал таким же порядком отводится от моря.

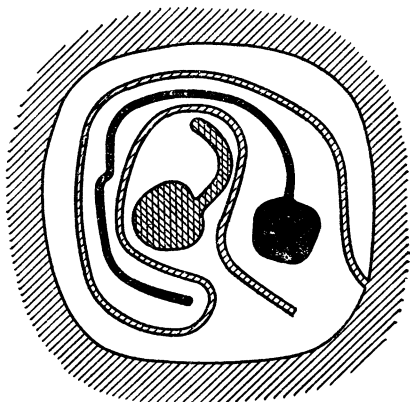


Рис. 36.

В следующие три дня каналы продолжают далее, причем так, чтобы на расстоянии, меньшем $1/2$, от каждой точки оставшейся суши была вода обоих озер и морская вода. В следующие за ними три дня густота сети каналов увеличивается, так что любая вода будет не далее чем на $1/4$ от каждой точки оставшейся суши, и т. д. Заметим, что после каждого дня работы оставшаяся суша будет связным куском, так что мы можем покрывать ее на следующий день еще более плотной сетью каналов.

В пределе мы получим сеть теплой, холодной и морской вод, которые нигде вместе не сливаются. То, что останется от суши, будет уже «линией», причем как угодно близко

от любой точки этой линии будет холодная, теплая и морская вода. Иначе говоря, на всем протяжении этой линии к ней будут «примыкать» три области: море с его каналами, холодное озеро с его каналами и теплое озеро с его каналами.

Евклид дает еще и третье описание линии: «поверхность имеет два измерения, линия имеет одно измерение, точка не имеет ни одного измерения». Определить, что такое размерность (число измерений) фигуры, пытались многие математики. Окончательное выяснение смысла этого понятия и создание теории размерности является заслугой замечательного советского математика П. С. Урысона, безвременно погибшего в возрасте 26 лет в 1924 году.

Говорят, что множество A , расположенное в фигуре X , отделяет точку a от точки b , если не существует в фигуре X связанного множества, которое содержит точки a и b и не пересекается с A . Например, поверхность шара (сфера) отделяет в пространстве внутренние точки шара

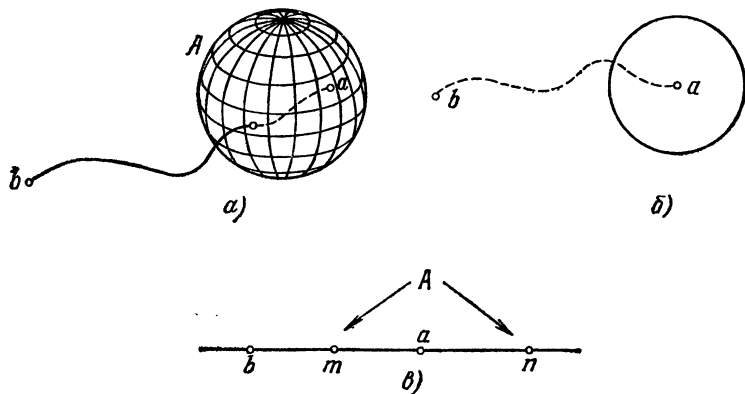


Рис. 37.

от внешних (рис. 37, а). Таким образом, в трехмерном пространстве отделение точек можно производить с помощью двумерных фигур. На плоскости (которая представляет собой двумерную фигуру) точку вместе с близкими к ней точками можно от остальных точек отделить с помощью одномерной фигуры (т. е. линии, рис. 37, б). Наконец, на прямой (т. е. одномерной фигуре) точку a вместе с близкими к ней точками можно от остальных точек прямой отделить с по-

мощью фигуры A , состоящей из двух точек m, n (см. рис. 37, в), т. е. с помощью нульмерной фигуры.

Итак, в фигуре, имеющей n измерений (или, как говорят, в n -мерной фигуре), отделение точки вместе с близкими к ней точками от остальной части фигуры можно производить с помощью фигур, имеющих на одно измерение меньше, чем вся фигура. Возникает мысль дать определение нульмерных фигур, через них определить одномерные фигуры (т. е. линии), затем с помощью одномерных определить двумерные фигуры и т. д.

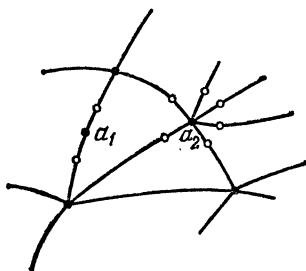


Рис. 38.

Будем говорить, что фигура X нульмерна, если в ней не существует никакой с в я з н о й фигуры, содержащей более одной точки. Например, фигура, состоящая из конечного числа точек, нульмерна. Фигура A в примере 15 также нульмерна.

Если определено уже, какие фигуры считаются $(n - 1)$ -мерными, то n -мерная фигура определяется как фигура, не являющаяся $(n - 1)$ -мерной, в которой любую

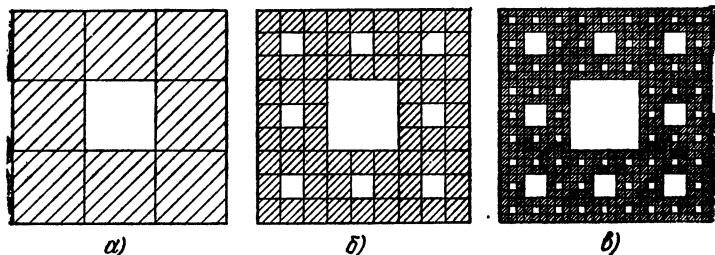


Рис. 39.

точку вместе с близкими к ней точками можно отделить от остальной части фигуры с помощью множества размерности $n - 1$ (или меньше). Это и есть урысоновское определение размерности.

Пример 17. Любой граф является одномерной фигурой, т. е. линией. Действительно, точку a вместе с близкими к ней точками можно отделить от остальной части

графа конечным (т. е. нульмерным) множеством: отделяющее множество содержит две точки, если a — внутренняя точка ребра (a_1 на рис. 38), и k точек, если a — вершина индекса k (a_2 на рис. 38).

Пример 18. Интересный пример линии был построен польским математиком Серпинским. Разделим квадрат на девять

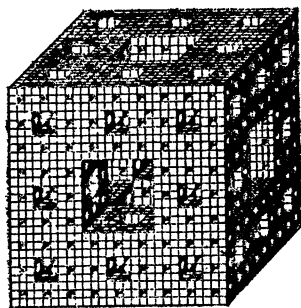
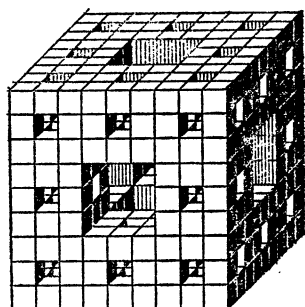
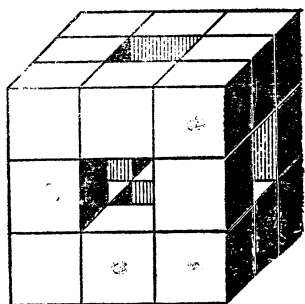


Рис. 40.

квадратов и выбросим средний из них (рис. 39, а). Каждый из восьми оставшихся квадратов снова разделим на девять квадратиков и выбросим средний (рис. 39, б). Затем так же поступим с каждым из оставшихся квадратиков (рис. 39, в) и т. д. В пределе мы получим некоторую одномерную фигуру C , т. е. линию («ковер Серпинского»).

Фигура C является универсальной плоской линией: если линия l вложима в плоскость, то она вложима в ковер Серпинского, т. е. существует линия $l' \subset C$, гомеоморфная l . Ясно, что линии, не вложимые в плоскость, не могут быть вложены и в ковер Серпинского. Однако существует в пространстве линия (аналог ковра Серпинского, рис. 40), в которую, как доказал австрийский математик Менгер, можно вложить любую линию,

Задачи

49. Существует ли на плоскости линия, являющаяся совместной границей двадцати областей?

50. Докажите, что диагональ квадрата, в котором построен ковер Серпинского C , пересекает C по нульмерному множеству. Выведите отсюда, что ковер Серпинского является одномерной фигурой, т. е. линией.

51. Докажите, что свойство фигуры быть линией, является топологическим инвариантом.

8. Кривая Пеано

Часто дают еще одно наглядное описание: «линия есть след движущейся точки».

Пример 19. Пусть движущаяся точка пробегает фигуру буквы Φ двумя способами, показанными на рис. 41 (сплошной линией указан путь, пройденный в некоторый момент, а штриховой — дальнейшее движение). В обоих случаях точка пробегает одно и то же множество, т. е. «след» движущейся точки одинаков, но пути различны.

Дадим точное определение понятия пути. Пусть в некоторой фигуре A движется точка, начиная от момента $t = 0$ до момента $t = 1$. Для каждого момента t , где $0 \leq t \leq 1$, известно положение $a(t)$ движущейся точки, т. е. каждой точке t отрезка $[0; 1]$ поставлена в соответствие точка $a(t) \in A$. Получается отображение отрезка $[0; 1]$ в фигуру A , причем отображение непрерывное, так как точка $a(t)$ «непрерывно» перемещается с изменением t . Это отображение и представляет собой путь. Мы приходим к следующему определению: *всякое непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$ в фигуру A называется путем* (в этой фигуре).

Любую простую дугу можно представлять себе как путь (ведь простая дуга получается с помощью гомеоморфного отображения отрезка, а гомеоморфное отображение непрерывно). В частности, линию, рассмотренную в примере 15 (имеющую «площадь»), можно рассматривать как «след движущейся точки». Уже это показывает, что понятие пути является не слишком простым. Следующий пример еще более подтверждает это.

Пример 20. Покажем, что можно построить путь, который проходит через каждую точку квадрата. Иными словами, существует непрерывное отображение отрезка на весь квадрат; такие пути называются *кривыми Пеано*. Для получения кривой Пеано построим в квадрате Q все более извивающиеся «полоски-лабиринты»: будем делить квадрат на $4, 16, 64, \dots, 4^n, \dots$ конгруэнтных квадратиков (рис. 42), а затем уберем некоторые из их сторон (рис. 43), причем перегородки, оставленные на каком-то этапе построения, сохраняются и на всех после-

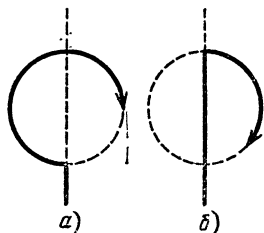


Рис. 41.

дующих. Средние линии этих полосок (штриховая линия на рис. 43) и дадут в пределе *путь*, *заполняющий весь квадрат Q*, т. е. кривую Пеано. Более точно этот путь

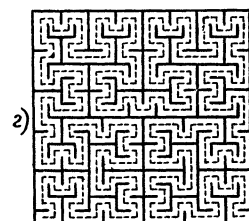
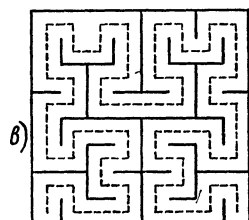
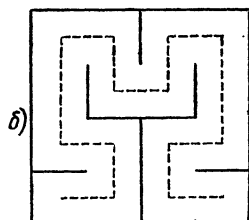
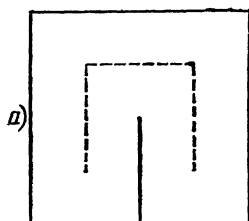
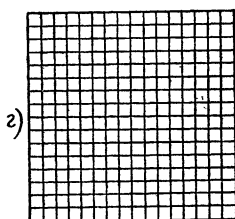
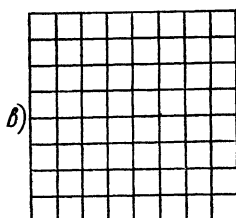
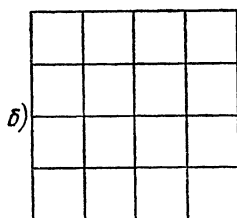
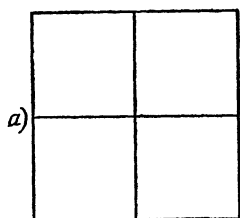


Рис. 42.

Рис. 43.

можно определить следующим образом. Рассмотрим непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$ на первую штриховую ломаную линию (рис. 43, a), при котором отрезок $[0; 1/4]$ отображается на часть этой ломаной, лежащую в левой нижней четверти большого квадрата, отрезок $[1/4, 1/2]$ — на часть, лежащую в левом верхнем квадрате, а

отрезки $[1/2, 3/4]$ и $[3/4, 1]$ — на части, лежащие в правых (верхнем и нижнем) квадратах. Это отображение обозначим через $f_1(t)$ (где $0 \leq t \leq 1$). Далее, через $f_2(t)$ обозначим отображение отрезка $[0; 1]$ на вторую штриховую ломаную (рис. 43, б), при котором отрезки $[0, 1/16]$, $[1/16, 2/16], \dots, [15/16, 1]$ отображаются на последовательные части этой ломаной, лежащие в шестнадцати квадратах второго этапа. Аналогично, $f_3(t)$ будет отображением отрезка $[0; 1]$ на пунктирную ломаную третьего этапа (рис. 43, в) и т. д. Предел последовательности функций $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots$ представляет собой отображение $f: [0; 1] \rightarrow Q$, т. е. некоторый путь в квадрате Q ; это и есть кривая Пеано. Легко пояснить, что этот предел существует. Возьмем, например, точку $1/3 \in [0; 1]$. Так как $1/3$ лежит в т о р о й четверти отрезка $[0; 1]$, т. е. $1/3 \in [1/4, 1/2]$, то точка $f_1(1/3)$ лежит в левом верхнем квадрате на рис. 42, а. Далее, так как $1/3 \in [5/16, 6/16]$, то $f_2(1/3)$ лежит в шестом по порядку квадрате, пробегаемом штриховой ломаной на рис. 43, б (т. е. в левом верхнем квадрате на рис. 42, б). Так как $1/3 \in [21/64, 22/64]$, то $f_3(1/3)$ лежит в 22-м квадрате, пробегаемом штриховой ломаной на рис. 43, в (т. е. в левом верхнем квадрате на рис. 42, в), и т. д. Предел этой последовательности уменьшающихся квадратов (вложенных последовательно один в другой), т. е., в данном случае, левая верхняя вершина квадрата и есть точка $f(1/3)$. Таким же образом определяется точка $f(t)$ для любого $t \in [0; 1]$.

Заметим, что кривая Пеано не является простой дугой: она имеет бесконечно много точек «склеивания» (т. е. в квадрате имеется бесконечно много точек, через которые построенный путь $f(t)$ проходит более, чем один раз).

Задачи

52. Докажите, что в квадрате Q имеются точки, через которые построенная кривая Пеано $f(t)$ проходит четыре раза, но нет точек, через которые она проходит пять раз.

53. Существует ли «пространственная кривая Пеано», т. е. путь в кубе, заполняющий весь этот куб?

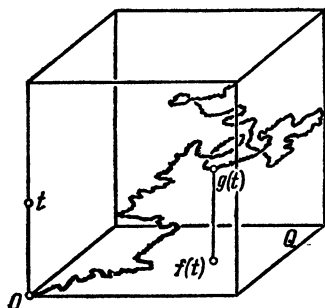


Рис. 44.

54. Расположим в горизонтальной плоскости квадрат Q и рассмотрим путь $f(t)$, представляющий собой кривую Пеано в этом квадрате. Через $g(t)$ обозначим точку в пространстве, расположенную над точкой $f(t)$ на высоте t (рис. 44). Докажите, что когда t пробегает отрезок $[0; 1]$, точка $g(t)$ пробегает путь в пространстве, представляющий собой простую дугу. Докажите, что проекция этой простой дуги на горизонтальную плоскость заполняет весь квадрат Q . Иными словами, построенная линия (простая дуга) представляет собой замысловатую «крышу» над всем квадратом Q .

Этот пример показывает, что не только понятие пути, но даже понятие простой дуги не является таким простым, каким оно интуитивно кажется с первого взгляда.

ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

9. Теорема Эйлера

В следующей таблице указано число вершин, ребер и граней пяти *правильных многогранников*.

Название многогранника	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаэдр	6	12	8
Додекаэдр	20	30	12
Икосаэдр	12	30	20

Из рассмотрения этой таблицы видно, что для каждого правильного многогранника имеет место соотношение:

$$B - P + \Gamma = 2, \quad (6)$$

где B — число вершин многогранника, P — число его ребер, Γ — число граней. Соотношение (6) легко проверяется также для пирамид, призм и других многогранников. Эйлер впервые подметил и доказал это замечательное свойство многогранников.

Уточним формулировку теоремы Эйлера. Прежде всего заметим, что любая грань каждого из рассмотренных многогранников гомеоморфна кругу. Далее, поверхность каждого из рассмотренных многогранников (или, вообще, любого выпуклого многогранника) гомеоморфна сфере: если o — произвольная внутренняя точка многогранника, а S — сфера с центром o , содержащая внутри себя этот многогранник, то проекция поверхности многогранника на сферу S из центра o представляет собой искомым гомеоморфизм. Таким образом, теорема Эйлера в уточненной формулировке принимает следующий

вид: для всякого многогранника, поверхность которого гомеоморфна сфере, а каждая грань гомеоморфна кругу, справедливо соотношение (6).

Можно придать этой теореме чисто топологическую формулировку. Для этого заметим, что все вершины и ребра многогранника образуют связный граф, который разбивает поверхность многогранника на отдельные грани (т. е. куски, гомеоморфные кругу). Мы получаем следующее (более общее, чем теорема Эйлера) утверждение:

Пусть на сфере (или гомеоморфной ей поверхности) начерчен связный граф G , имеющий V вершин и P ребер и разбивающий сферу на Γ областей («граней»); тогда справедливо соотношение (6). Идея доказательства этой теоремы содержится в задаче 55.

Задачи

55. Пусть G — связный граф, начерченный на сфере, G^* — его максимальное дерево и k — число перемычек (т. е. ребер графа G , не содержащихся в G^*). Докажите, что граф G^* определяет на сфере лишь одну область (грань), и потому для него соотношение (6) справедливо. Докажите, что добавление каждой перемычки увеличивает число граней на одну, и получите отсюда доказательство теоремы Эйлера.

56. Докажите, что для любого связного графа, расположенного на плоскости, справедливо соотношение (6) (к числу «граней» надо причислять и наружную, неограниченную область).

57. Пусть G — граф, вложимый в плоскость. Докажите, что при любом способе его вложения в плоскость он разбивает плоскость на $g - V + P + 1$ областей, где g — число компонент графа G , а V и P — число его вершин и ребер.

58. Выпуклый n -угольник разбит на треугольники, примыкающие друг к другу целыми сторонами (рис. 45), причем на сторонах n -угольника расположены m вершин разбиения, а внутри него p вершин. Докажите, что n -угольник разбит на $m + n + 2p - 2$ треугольников.

59. Обозначим через n_3 число треугольных граней выпуклого многогранника, через n_4 — число его четырехугольных граней и т. д. Докажите, что

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 + n_1 + 2n_2 + 3n_6 + 4n_{10} + \dots$$

В каком случае имеет место равенство?

60. Говорят, что связный граф, расположенный на сфере, определяет топологически правильное разбиение сферы, если каждая грань этого разбиения является n -угольником (т. е. ограничена замкнутой цепочкой из n ребер) и в каждой вершине сходятся k граней. Докажите, что в этом случае

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{P},$$

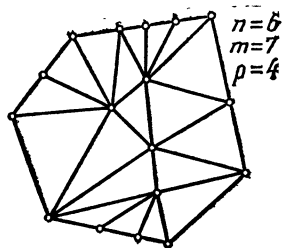


Рис. 45.

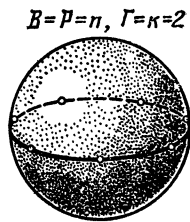
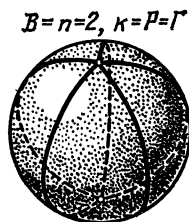


Рис. 46.

где P — число ребер. Выведите отсюда, что кроме разбиений, топологически эквивалентных пяти правильным многогранникам, существуют лишь два типа топологически правильных разбиений, которые показаны на рис. 46.

10. Поверхности

Пример 21. На рис. 47 изображена «книжка с тремя листами». Вблизи точек x, y, z эта фигура устроена по-разному. Окрестность точки y имеет вид полукруга, причем точка y лежит на его границе. В этом случае говорят, что точка y лежит на крае фигуры. Окрестность точки z состоит из трех полукругов, соединенных по общему диаметру; говорят, что в этом месте фигура *разветвляется* (т. е. к некоторой линии примыкает три или более «листов» рассматриваемой фигуры). Наконец, точка x имеет окрестность в виде круга, причем точка x лежит в н у т р и этого круга; здесь фигура не имеет ни края, ни разветвления.

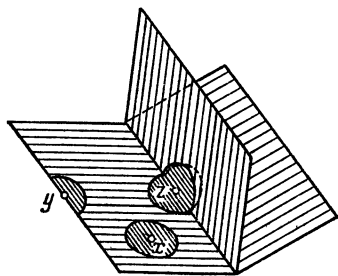


Рис. 47.

Фигура, у которой каждая точка x имеет окрестность, гомеоморфную кругу (в н у т р и которого лежит точка x), называется *поверхностью*. Поверхность не имеет краев и разветвлений. Сфера и тор являются поверхностями. Рассматривают также *поверхности с краем*; они имеют края, но не имеют разветвлений. Круг — поверхность с краем. Сфера, в которой вырезаны несколько круглых отверстий (рис. 48), также является поверхностью с краем.

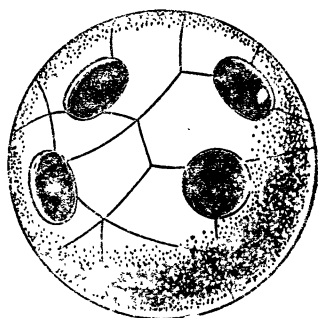


Рис. 48.

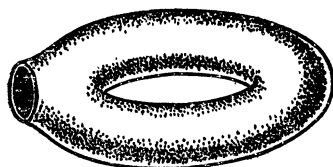


Рис. 49.

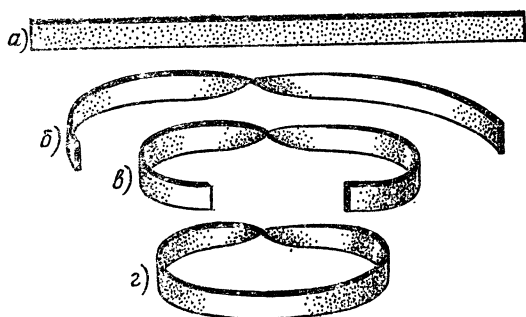


Рис. 50.

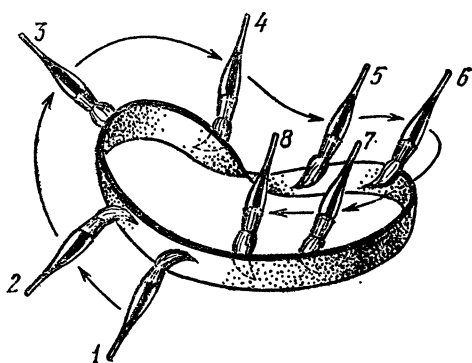


Рис. 51.

Пример 22. Если на торе вырезать круглую дыру, то мы получим поверхность с краем, которая называется *ручкой* (рис. 49).

Пример 23. Интересный пример поверхности с краем был описан в 1862—1865 годах в работах немецких математиков Мёбиуса и Листинга. Она получается следующим образом. Лента прямоугольной формы (рис. 50, *a*) один раз перекручивается (рис. 50, *б, в*) и затем ее концы склеиваются. Полученная поверхность с краем (рис. 50, *г*)

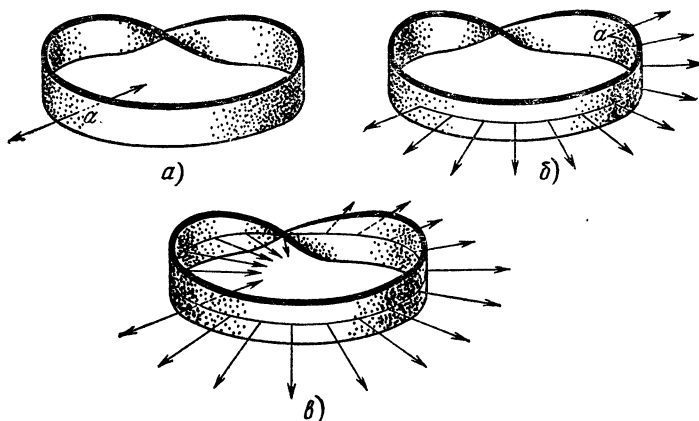


Рис. 52.

называется *лентой Мёбиуса*. Эта поверхность имеет лишь одну сторону. Например, перемещая кисточку по ленте Мёбиуса (рис. 51), мы приходим к тому же месту, с которого начинали закрашивание, но с обратной стороны. Перемещая кисточку дальше, мы закрасим всю ленту Мёбиуса и убедимся, что у нее нет «второй стороны».

Разумеется, наглядное описание односторонней поверхности с помощью «окрашивания» возможно лишь для «толстой поверхности», изготовленной из некоторого материала; математически же поверхность не имеет толщины. Поэтому приведем другое описание «односторонности». В каждой точке *a* ленты Мёбиуса можно провести два противоположных вектора, перпендикулярных к ней в этой точке (рис. 52, *a*). Эти векторы называют *нормалью* к ленте Мёбиуса в точке *a*. Выберем одну из них и начнем перемещать точку *a* вместе с нормалью по ленте Мёбиуса (рис. 52, *б*). Когда точка *a* обойдет всю ленту Мё-

биуса, перемещающаяся нормаль перейдет не в свое первоначальное положение, а в противоположное (рис. 52, в). Итак, на ленте Мёбиуса существует такой замкнутый путь (обход), что при прохождении этого пути нормаль к поверхности приходит в положение, противоположное первоначальному. Поверхности, обладающие такими обходами, и называются *односторонними*.

Однако, говоря о нормалях, мы изучаем не только саму поверхность, но и ее расположение в пространстве.

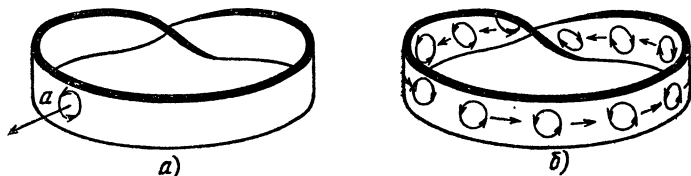


Рис. 53.

Поэтому приведем «внутреннее» определение односторонних поверхностей. Условимся вокруг точки *a*, из которой проведена нормаль, описывать небольшую окружность и на ней отмечать стрелкой направление, которое из конца проведенной нормали наблюдается как направление п р о т и в часовой стрелки (рис. 53, а). Если точка *a* перемещается, то вместе с ней перемещается и нормаль, а также

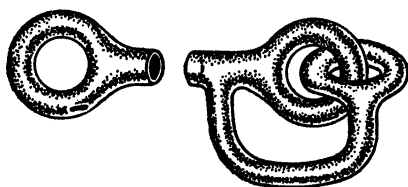


Рис. 54.

окружность с имеющимся на ней направлением. Когда мы обведем окружность по всей ленте Мёбиуса, направление на окружности изменится на противоположное (так как нормаль изменит свое направление, рис. 53, б).

Итак, на ленте Мёбиуса имеется такой замкнутый путь (обход), что при перемещении окружности вдоль этого пути направление на окружности меняется на противоположное. Такие обходы называются *обращающими ориентацию*.

Если на поверхности нет обращающих ориентацию обходов, то она называется *ориентируемой* (или *двусторонней*); если есть — *неориентируемой* (или *односторонней*). С наглядной точки зрения ориентируемость означает, что всю поверхность можно покрыть маленькими

окружностями и выбрать на них такие направления, что близкие окружности будут ориентированы одинаково.

Пусть теперь Q_1 и Q_2 — две поверхности, у каждой из которых имеется край, гомеоморфный окружности (рис. 54). Соединив («склеив») края этих поверхностей,

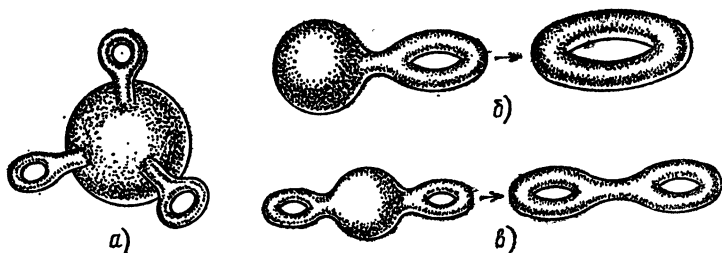


Рис. 55.

мы получим одну новую поверхность. Говорят, что дыра, имеющаяся в поверхности Q_1 , заклеивается поверхностью Q_2 (или наоборот).

Пример 24. Рассмотрим сферу, в которой вырезано p круглых дыр, и заклеим каждую из дыр ручкой. Полученная поверхность (рис. 55, а) называется *сферой с p ручками*. Сфера с одной ручкой гомеоморфна тору (рис. 55, б), а сфера с двумя ручками — поверхности «кренделя» (получающейся склеиванием двух ручек, рис. 55, в).

Задачи

61. Докажите, что граф «домики и колодцы» (пример 12) можно расположить (без самопересечений) на ленте Мёбиуса.

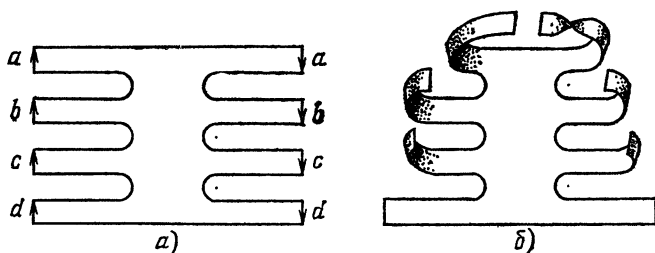


Рис. 56.

62. У «зубчатой» фигуры, изображенной на рис. 56, а, склеиваются с перекручиванием каждые два отрезка, обозначенные одинаково (рис. 56, б). Докажите, что получающаяся поверхность является односторонней, а ее край гомеоморфен окружности.

63. В шаре высверлены три сквозных цилиндрических отверстия, не соединяющихся между собой. Докажите, что поверхность получившегося тела гомеоморфна сфере с тремя ручками.

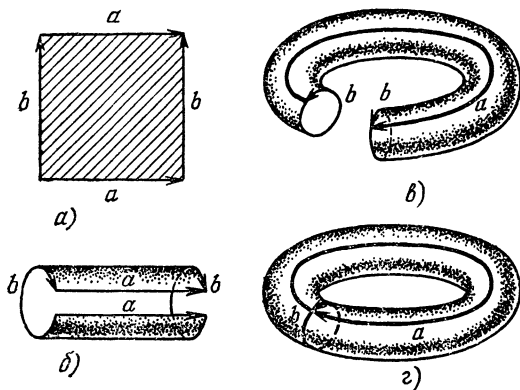


Рис. 57.

64. В шаре высверлены три сквозных цилиндрических отверстия, оси которых проходят через центр шара. Докажите, что поверхность получившегося тела гомеоморфна сфере с пятью ручками.

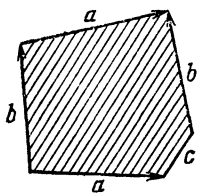


Рис. 58.

65. Если попарно склеить противоположные стороны квадрата с учетом указанных на рис. 57, а направлений, то получится тор (рис. 57, б, в, г). Какая поверхность получится, если склеивание произвести с учетом направлений на рис. 58 (сторона с остается не склеенной)?

66. Какая поверхность получится, если в $4k$ -угольнике, показанном на рис. 59, попарно склеить одинаково обозначенные стороны с учетом направлений?

Мы подходим к формулировке замечательной теоремы о топологической классификации поверхностей, получен-

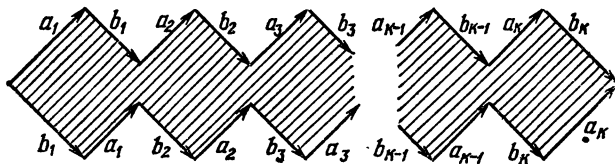


Рис. 59.

ной в прошлом столетии Мёбиусом и французским математиком Жорданом. Условимся рассматривать только *замкнутые поверхности* (которые не имеют края и допус-

кают разбиение на конечное число многоугольников). Плоскость, например, не является замкнутой поверхностью: конечный граф, начерченный на плоскости, не разбивает ее на области, которые все гомеоморфны кругу. Задача топологической классификации поверхностей заключается в том, чтобы *указать такие попарно не гомеоморфные замкнутые поверхности, что любая замкнутая поверхность гомеоморфна одной из них*. Иначе говоря, нужно перечислить *все топологически различные замкнутые поверхности*.

Решение этой задачи рассмотрим сначала для *ориентируемых* поверхностей. Обозначим через P_0 сферу, а через P_k — сферу с k ручками. Оказывается, что *поверхности*

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_k, \dots \quad (7)$$

и дают полную топологическую классификацию замкнутых ориентируемых поверхностей, т. е. здесь перечислены все топологически различные типы таких поверхностей. Доказательство будет дано в следующих двух пунктах.

11. Эйлерова характеристика поверхности

Пусть Q — поверхность (с краем или без края, двусторонняя или односторонняя), которая допускает *разбиение на многоугольники*; это означает, что на поверхности можно «нарисовать» граф, разбивающий ее на конечное число кусков, гомеоморфных кругу. Обозначим число вершин и ребер графа через V и P , а число многоугольников, на которые Q разбивается этим графом, — через Γ . Число

$$\chi(Q) = V - P + \Gamma \quad (8)$$

называется *эйлеровой характеристикой* поверхности Q . Строго говоря, число (8) определяется не самой поверхностью Q , а выбором ее разбиения на многоугольники. Однако теорема Эйлера показывает, что для поверхности Q , гомеоморфной сфере, эйлерова характеристика не зависит от выбора разбиения на многоугольники: $\chi(Q) = 2$ (см. (6)). Мы докажем, что *и для любой поверхности Q ее эйлерова характеристика $\chi(Q)$ не зависит от выбора разбиения на многоугольники, а определяется самой поверхностью, является ее топологическим инвариантом*.

В самом деле, пусть на поверхности Q «нарисованы» два графа G_1, G_2 , каждый из которых задает разбиение на

многоугольники. Числа вершин, ребер и граней разбиения, определяемого графом G_1 , обозначим через V_1, P_1, Γ_1 , а соответствующие числа для разбиения, определяемого графом G_2 , — через V_2, P_2, Γ_2 . Вообще говоря, графы G_1 и G_2 могут пересекаться в бесконечном числе точек. Однако, «пошевелив» граф G_1 , мы сможем добиться того, чтобы G_1 и G_2 пересекались лишь в конечном числе точек.

Далее, если граф $G_1 \cup G_2$ несвязен, то, «пошевелив» графы G_1, G_2 , можно добиться того, чтобы они имели общие точки и, следовательно, их объединение было связным. Итак, мы можем предполагать, что графы G_1 и G_2 пересекаются лишь в конечном числе точек и имеют связанное объединение $G_1 \cup G_2$. Считая новыми вершинами все точки пересечения графов G_1 и G_2 , а также все вершины этих графов, мы найдем, что $G_1 \cup G_2$ является конечным связным графом (его ребрами являются куски ребер графов G_1 и G_2 , на которые они разбиваются вершинами графа $G_1 \cup G_2$).

Обозначим через V и P число вершин и ребер графа $G_1 \cup G_2$, а через Γ — число граней, на которые он разбивает поверхность Q . Идея состоит в том, чтобы доказать равенства

$$\left. \begin{aligned} V_1 - P_1 + \Gamma_1 &= V - P + \Gamma, \\ V_2 - P_2 + \Gamma_2 &= V - P + \Gamma, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

из которых и будет следовать, что $V_1 - P_1 + \Gamma_1 = V_2 - P_2 + \Gamma_2$. Оба равенства (9) доказываются одинаково; докажем первое.

Пусть M — некоторый многоугольник («грань»), определяемый графом G_1 . Обозначим число вершин и ребер графа $G_1 \cup G_2$, расположенных внутри M (не на контуре), через V' и P' , а число вершин (а значит, и ребер) этого графа, расположенных на контуре многоугольника M , через q . Далее, число граней, определяемых графом $G_1 \cup G_2$ и содержащихся в M , обозначим через Γ' . На рис. 60 имеем $V' = 4, P' = 12, \Gamma' = 9, q = 15$.

Вырежем теперь многоугольник M (вместе с имеющейся на нем частью графа $G_1 \cup G_2$) из поверхности Q . Так как M гомеоморфен кругу и, значит, полусфере, то его можно второй («нижней») полусферой дополнить до поверхности, гомеоморфной сфере (рис. 61). На этой сфере расположен связный граф, имеющий $V' + q$ вершин, $P' + q$ ребер и определяющий $\Gamma' + 1$ граней (Γ' граней содержится в M и еще одной гранью является нижняя

полусфера). Следовательно, согласно (6), $(B' + q) - (P' + q) + (\Gamma' + 1) = 2$, т. е.

$$B' - P' + \Gamma' = 1. \quad (10)$$

Если теперь (возвращаясь к поверхности Q , на которой начерчен граф $G_1 \cup G_2$) мы выбросим из графа $G_1 \cup G_2$ его часть, расположенную в н у т р и M , то получится новый граф, для которого, однако, число $B - P + \Gamma$ останется таким же, как и для графа $G_1 \cup G_2$. В самом деле,

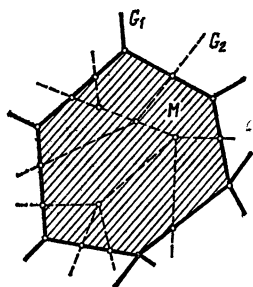


Рис. 60.

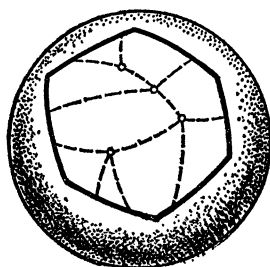


Рис. 61.

вместо B' вершин, P' ребер и Γ' граней, имевшихся в н у т р и M , мы теперь будем иметь 0 вершин, 0 ребер и одну грань (сам многоугольник M), т. е. число $B' - P' + \Gamma'$ заменится на $0 - 0 + 1$, а это, согласно (10), ничего не меняет.

Теперь ясно, что если мы из графа $G_1 \cup G_2$ выбросим его части, расположенные в н у т р и в с е х многоугольников, определяемых графом G_1 , то получим новый граф G^* , для которого число $B - P + \Gamma$ будет таким же, как и для графа $G_1 \cup G_2$. Иначе говоря,

$$B^* - P^* + \Gamma^* = B - P + \Gamma, \quad (11)$$

где B^* и P^* — число вершин и ребер графа G^* , а Γ^* — число определяемых им граней.

Заметим, наконец, что граф G^* получается из G_1 добавлением нескольких новых вершин на ребрах. Добавление каждой новой вершины увеличивает число ребер на 1 (поскольку добавленная вершина разбивает одно из ребер на два). Следовательно, если переход от графа G_1 к G^* осуществляется добавлением k новых вершин, то $B^* = B_1 + k$, $P^* = P_1 + k$. Кроме того, $\Gamma^* = \Gamma_1$ (так как граф

G^* определяет те же грани, что и граф G_1). Таким образом,

$$\begin{aligned} V^* - P^* + G^* &= (V_1 + k) - (P_1 + k) + G_1 = \\ &= V_1 - P_1 + G_1, \end{aligned}$$

а это, согласно (11), и дает первое из соотношений (9).

Итак, эйлерова характеристика поверхности не зависит от ее разбиения на многоугольники, а определяется самой поверхностью. Кроме того, эйлерова характеристика является *топологическим инвариантом*: если поверхности Q_1 и Q_2 гомеоморфны, то $\chi(Q_1) = \chi(Q_2)$. В самом деле, при гомеоморфизме $f: Q_1 \rightarrow Q_2$ граф G_1 , начерченный на поверхности Q_1 , переходит в граф $G_2 = f(G_1)$, начерченный на Q_2 , причем вершин, ребер и граней на поверхности Q_2 будет столько же, сколько и на поверхности Q_1 .

Задачи

67. Докажите, что сфера с вырезанными в ней q дырами имеет эйлерову характеристику $2 - q$.

68. Пусть Q_1 и Q_2 — две поверхности, каждая из которых имеет край, гомеоморфный окружности. Докажите, что, склеивая эти края (см. рис. 54), мы получим поверхность, эйлерова характеристика которой равна $\chi(Q_1) + \chi(Q_2)$.

69. Чему равна эйлерова характеристика круга? Ручки? Лен-ты Мёбиуса?

70. Докажите, что эйлерова характеристика поверхности P_k равна $2 - 2k$.

71. На торе осуществлено топологически правильное разбиение (см. задачу 60). Докажите, что каждая грань является либо треугольником, либо четырехугольником, либо шестиугольником. Приведите примеры правильных разбиений каждого из этих типов.

72. На замкнутой поверхности Q нарисован граф с V вершинами и P ребрами. Он разбивает поверхность Q на Γ областей (среди которых, возможно, есть не гомеоморфные кругу). Докажите, что $V - P + \Gamma \geq \chi(Q)$.

У к а з а н и е. Для того чтобы разрезать поверхность Q на многоугольники (гомеоморфные кругу), достаточно последовательно применить одну или несколько операций следующего вида: а) добавление новой вершины на одном из ребер графа; б) добавление ребра, имеющего лишь одну общую вершину с начерченным графом; в) добавление ребра, соединяющего две вершины уже начерченного графа. Проверьте, что при каждой из этих операций число $V - P + \Gamma$ может лишь уменьшиться.

73. На замкнутой поверхности Q начерчен граф с V вершинами и P ребрами; поверхность Q разбивается этим графом на Γ областей. Докажите, что если каждая из областей имеет на своей границе не менее k ребер, то $(k - 2)P \leq kV - k\chi(Q)$.

12. Классификация замкнутых ориентируемых поверхностей

Поверхности (7) попарно не гомеоморфны, так как имеют разные эйлеровы характеристики (задача 70). Таким образом, для доказательства теоремы, сформулированной в конце пункта 10, остается установить, что любая замкнутая ориентируемая поверхность гомеоморфна одной из поверхностей (7). Доказательство проведем в несколько этапов.

А) Пусть Q — некоторая связная замкнутая ориентируемая поверхность. Начертим на ней связный граф G , разбивающий ее на грани, гомеоморфные кругу. Для каждой вершины графа G возьмем на поверхности Q маленький кружок, содержащий внутри себя эту вершину. Эти кружки будем называть *шапочками*. Далее, для каждого ребра графа G возьмем узкую *полоску*, идущую вдоль этого ребра и соединяющую шапочки, которые соответствуют концам взятого ребра. Если удалить из поверхности Q все шапочки и все полоски, то от каждой грани останется кусок, гомеоморфный кругу; этот кусок будем

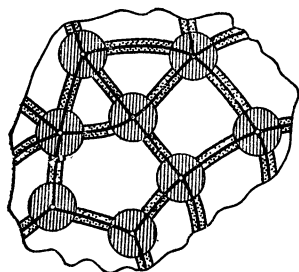


Рис. 62.

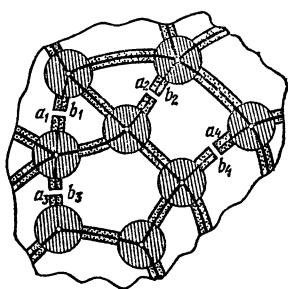


Рис. 63.

называть *сердцевинами* грани. На рис. 62, на котором изображен кусок поверхности Q , шапочки заштрихованы, полоски покрыты точками, а сердцевины оставлены белыми. Идея заключается в том, чтобы разрезать поверхность Q на шапочки, полоски, сердцевины, а затем снова склеить ее из этих кусков, прослеживая шаг за шагом, что получается при склеивании.

Прежде всего вырежем из поверхности Q все сердцевины граней; оставшуюся часть поверхности обозначим через Q_0 . Ее край состоит из всех контуров сердцевин.

Б) Выделим в графе G максимальное дерево (на рис. 63 оно вычерчено жирно), и все полоски, соответствующие переключкам (т. е. ребрам графа G , не входящим в это дерево), рассекаем в середине. Отрезки $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_pb_p$, по которым производится рассечение полосок, назовем *хордами*. Рассечение будем производить постепенно: рассечение по хорде a_1b_1 превращает Q_0 в поверхность Q_1 ; если в Q_1 произвести рассечение по хорде a_2b_2 , получим поверхность Q_2 ; \dots ; наконец, рассекая Q_{p-1} по хорде a_pb_p , получим поверхность Q_p . Для получения из Q_p поверхности Q_0 нужно вновь произвести склеивание по хордам.

В) Прежде чем осуществлять эти обратные склеивания, заметим, что *поверхность Q_p гомеоморфна кругу*. В самом деле, будем вычерчивать максимальное дерево графа G , беря одно ребро, еще одно, еще одно и т. д. — так, чтобы все время получалось дерево. Полоска и две шапочки, соответствующие первому ребру и его концам, составляют поверхность, гомеоморфную кругу (рис. 64, а). Добавление полоски и шапочки, соответствующих второму ребру, снова дает поверхность, гомеоморфную кругу (рис. 64, б).

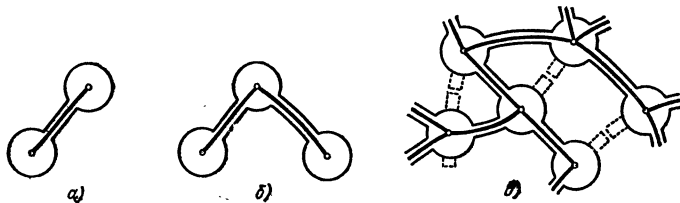


Рис. 64.

Вообще, при каждом проведении ребра, к уже имевшейся поверхности, гомеоморфной кругу, приклеиваются одна полоска и одна шапочка, что вновь дает поверхность, гомеоморфную кругу. В конце концов, вычертив максимальное дерево графа G , мы получим гомеоморфную кругу поверхность, составленную из всех шапочек и тех полосок, которые соответствуют ребрам максимального дерева. Для получения поверхности Q_p остается приклеить *полуполоски*, образовавшиеся из оставшихся полосок после рассечения по хордам (пунктир на рис. 64, в). Но каждое приклеивание полуполоски оставляет поверхность гомеоморфной кругу.

Мы покажем теперь, что *каждая из поверхностей $Q_p, Q_{p-1}, \dots, Q_1, Q_0$ гомеоморфна сфере, в которой вырезаны*

несколько дыр и часть из них заклеена ручками. Относительно поверхности Q_p это очевидно: она гомеоморфна кругу, т. е. сфере, в которой вырезана одна дыра и не вклеено ни одной ручки.

Г) Рассмотрим при каждом $i = 1, \dots, p$ переход от поверхности Q_{i-1} к поверхности Q_i (т. е. рассечение по хорде $a_i b_i$) и обратный переход от Q_i к Q_{i-1} . Здесь могут

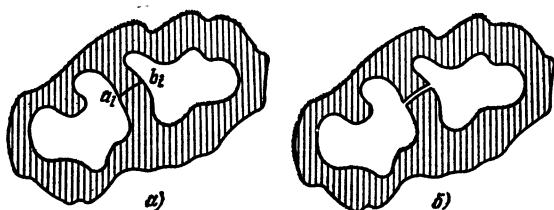


Рис. 65.

представиться две возможности: точки a_i и b_i расположены на одной и той же компоненте края поверхности Q_{i-1} или на разных компонентах.

Если a_i и b_i расположены на разных компонентах края поверхности Q_{i-1} , то рассечение по хорде $a_i b_i$ приводит к уменьшению числа дыр на одну (рис. 65, а и б). Следовательно, обратный переход (от Q_i к Q_{i-1}) сводится к вырезанию одной новой дыры. Поэтому, если Q_i получалась из сферы вырезанием нескольких дыр и заклеиванием части из них ручками, то это же справедливо и для Q_{i-1} .

Д) Пусть теперь концы хорды $a_i b_i$ принадлежат одной компоненте края поверхности Q_{i-1} (рис. 66). Получающаяся при рассечении поверхность Q_i (рис. 67) гомеоморфна поверхности (рис. 68), получающейся из Q_{i-1} двумя разрезами: сначала по замкнутой линии l , не пересекающейся с краем поверхности Q_{i-1} (это дает промежуточную поверхность Q_i^* , (рис. 69), а затем по хорде $a_i c_i$, концы которой лежат на разных компонентах края поверхности Q_i^* . Обратный переход от Q_i (см. рис. 68) к Q_i^* (рис. 69), как мы видели в пункте Г), сводится к вырезанию одной дыры. Остается рассмотреть переход от Q_i^* к Q_{i-1} .

Итак, пусть Q_i^* получается из Q_{i-1} разрезанием по контуру l , не пересекающемуся с краем поверхности Q_{i-1} .

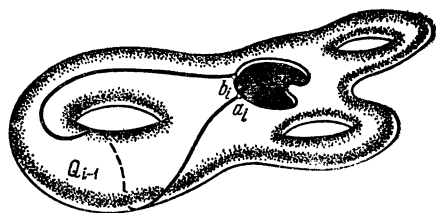


Рис. 66.



Рис. 67.

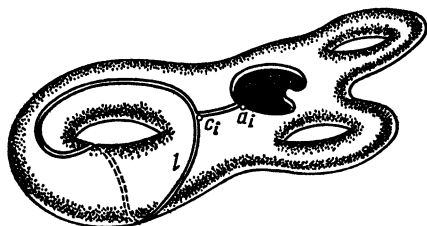


Рис. 68.

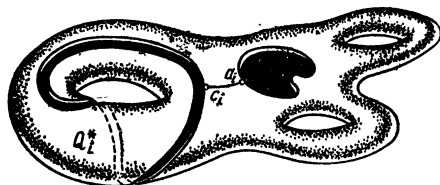


Рис. 69.



Рис. 70.

Если вместо того, чтобы производить этот разрез, мы вырежем из Q_{i-1} узкую полосу L , заключающую внутри себя линию l (рис. 70), то получится поверхность, гомеоморфная Q_i^* . Полоска L гомеоморфна либо ленте Мёбиуса, либо боковой поверхности цилиндра. В самом деле, если

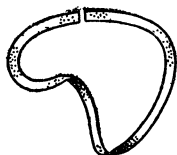


Рис. 71.

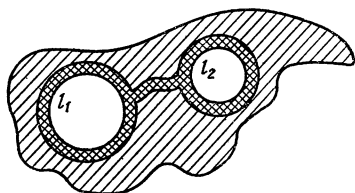


Рис. 72.

эту полосу разрезать (рис. 71), то ее можно распрямить в узкую прямоугольную ленту; следовательно, L можно получить склеиванием концов прямоугольной ленты, и надо лишь проследить, происходит это склеивание с перекручиванием или нет.

Но ленте Мёбиуса полоска L гомеоморфна быть не может, так как на ленте Мёбиуса имеется обход, обращающий ориентацию, а исходная поверхность Q (и все поверхности Q_0, Q_1, \dots, Q_p) ориентуемы. Итак, L гомеоморфна боковой поверхности цилиндра. Следовательно, после разрезания по линии l она распадается на две части, и потому поверхность Q_i^* имеет по сравнению с Q_{i-1} две новые компоненты края l_1, l_2 . Обратный переход от Q_i^* к Q_{i-1} заключается в склеивании двух контуров дыр l_1, l_2 , имеющих на поверхности Q_i^* .

Окружим контуры l_1, l_2 узкими кольцевыми полосками и соединим их полоской друг с другом. Мы получим на поверхности Q_i^* фигуру («очки», рис. 72), гомеоморфную кругу с двумя дырами (рис. 73). Склеивание контуров l_1 и l_2 должно производиться с учетом противоположной ориентации на них, так как иначе полоска, заштрихованная на рис. 74, превратилась бы при склеивании в ленту Мёбиуса, что невозможно в силу ориентируемости поверхности Q_{i-1} . Следовательно, склеивание контуров l_1 и l_2 равносильно вклеиванию в поверхность Q_i^* ручки (рис. 75). Итак, переход от Q_i к Q_i^*

сводится к вырезыванию одной дыры, а переход от Q_i^* к Q_{i-1} — к уменьшению числа дыр и вклеиванию одной ручки. Поэтому, если Q_i получалось из сферы вырезанием нескольких дыр и заклеиванием части из них ручками, то это же справедливо и для Q_{i-1} .

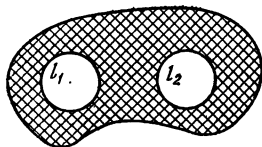


Рис. 73.

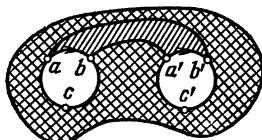


Рис. 74.



Рис. 75.

Е) Проведенная индукция показывает, что Q_0 получается из сферы вырезанием $k + r$ дыр и заклеиванием k из них ручками ($k \geq 0, r \geq 0$). Остается заметить, что при переходе от Q_0 к исходной поверхности Q в поверхность Q_0 вновь вклеиваются все сердцевинки, т. е. каждая из r дыр, имеющих в поверхности Q_0 , заклеивается кругом. Таким образом, Q получается из сферы вырезанием k дыр и заклеиванием их всех ручками, т. е. Q гомеоморфна одной из поверхностей (7).

Задачи

74. Сформулируйте и докажите теорему о топологической классификации ориентируемых поверхностей с краем

75. На поверхности P_k проведено q контуров, не пересекающихся друг с другом, причем после разрезания по всем этим контурам поверхность остается связной. Докажите, что $q \leq k$.

76. На замкнутой поверхности Q осуществлено топологически правильное разбиение: каждая грань — пятиугольник, в каждой вершине сходятся по четыре грани. Докажите, что если число граней не кратно восьми, то поверхность Q неориентируема.

77. На замкнутой поверхности Q проведены три линии p, q, r , гомеоморфные отрезку, которые имеют общие концы и попарно не имеют других общих точек. Докажите, что если разрез по одной из линий $p \cup q, p \cup r, q \cup r$ оставляет поверхность связной, то хотя бы одна из двух других также обладает этим свойством.

78. Если на одной из граней правильного додекаэдра (рис. 76, а) продолжить все стороны до пересечения, то мы получим правильную пятиконечную звезду (рис. 76, б). Две такие звезды, построен-

ные на смежных гранях (рис. 76, *е*) имеют общий отрезок ad . Условимся, однако, считать, что эти звезды примыкают друг к другу только по отрезкам ab и cd , а отрезок bc будем считать «лишним» пересечением этих звезд, происходящим из-за «неудачного» расположения этих звезд в пространстве. После построения аналогичных звезд для всех граней додекаэдра (рис. 76, *е*) мы получим некоторую поверхность Q , расположенную в пространстве с самопересечениями («лишними» линиями пересечения будут ребра исходного

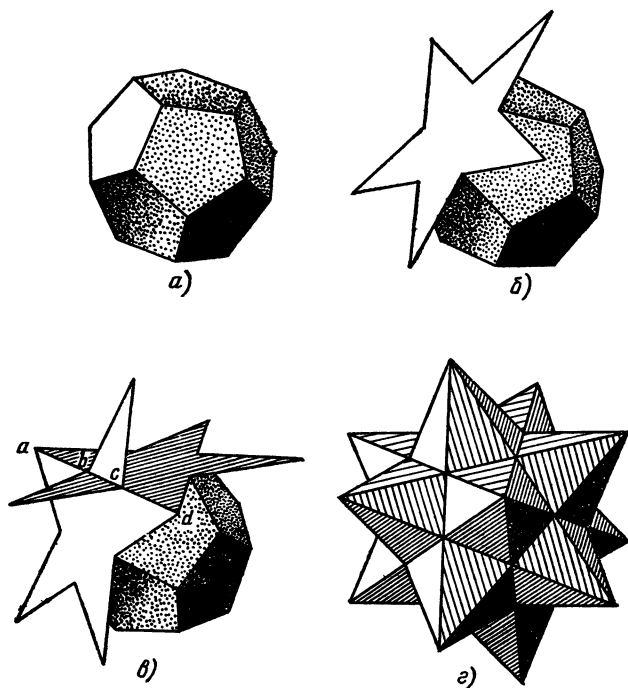


Рис. 76.

додекаэдра). Докажите, что эта поверхность является ориентируемой и имеет эйлерову характеристику $\chi(Q) = -16$, а значит, гомеоморфна сфере с девятью ручками.

Можно построить и иную поверхность, связанную с додекаэдром. Добавим к контуру каждой звезды такие отрезки, как bc (рис. 76, *е*), так что получится замкнутая пятизвенная ломаная (самопересекающаяся). Затем расправим эти ломаные, устранив самопересечения (так что сторонами станут отрезки типа ad), и на каждую из них натянем грань (пятиугольник). Тогда получится поверхность, состоящая из двенадцати пятиугольных граней, причем число вершин (таких, как a , d) будет также равно 12, а число ребер 30. Докажите, что эта поверхность ориентируема и имеет эйлерову характеристику $\chi = -6$, а значит, гомеоморфна сфере с четырьмя ручками.

79. Построим на каждой грани куба «четырёхконечную звезду» (с искривлёнными лучами; см. рис. 77, а) так, чтобы соседние звезды соприкасались краями лучей (рис. 77, б). После построения таких звезд на всех гранях куба получится поверхность, расположенная

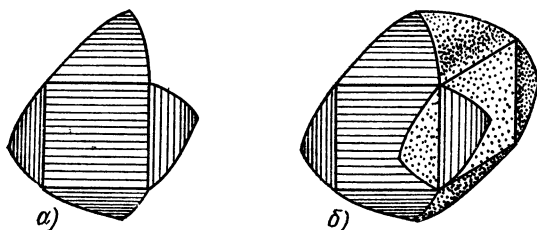


Рис. 77.

в пространстве с самопересечениями («лишними» линиями пересечения будут ребра куба). Докажите, что эта поверхность гомеоморфна P_3 .

80. Какие поверхности получатся, если построить «трехконечные звезды» (аналогично тому, как описано в условии задачи 79) на гранях тетраэдра, октаэдра, икосаэдра?

13. Классификация замкнутых неориентируемых поверхностей

Замкнутую неориентируемую поверхность можно расположить в пространстве лишь с самопересечениями.

Пример 25. На рис. 78, а изображена поверхность с краем l , а на рис. 78, б — ее разрез через «горлышко»

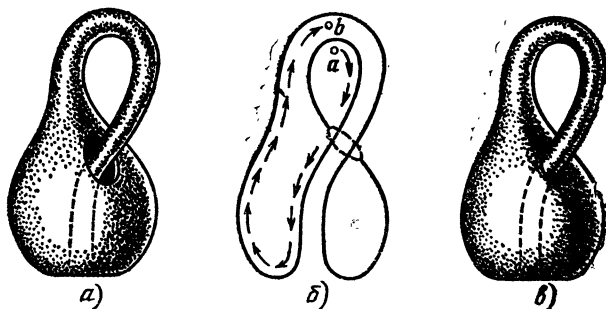


Рис. 78.

Заклеивание дыры l кругом дает замкнутую поверхность (рис. 78, в), которая, однако, пересекает себя. В действительности самопересечения не должно быть — мы хотим считать, что оно возникает лишь из-за «неудачного»

расположения поверхности в пространстве. Полученная поверхность называется *бутылкой Клейна*. Она одно-сторонняя: начав движение от точки, расположенной на внешней поверхности горлышка, можно пройти внутрь горлышка (рис. 78, б).

Пример 26. Так как *край ленты Мёбиуса гомеоморфен окружности* (рис. 79), то можно попытаться приклеить

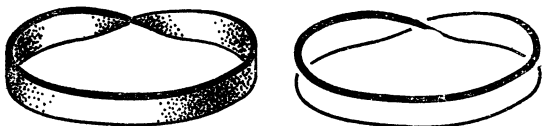


Рис. 79.

ленту Мёбиуса своим краем к краю дыры, вырезанной в некоторой поверхности. На рис. 80, а изображена лента Мёбиуса (кольцо с перекручиванием), а на рис. 80, б — кусок поверхности Q с вырезанной в ней дырой. Если «разогнуть» внутреннюю «лопасть» поверхности Q , то легко увидеть (рис. 80, в), что в ней вырезана

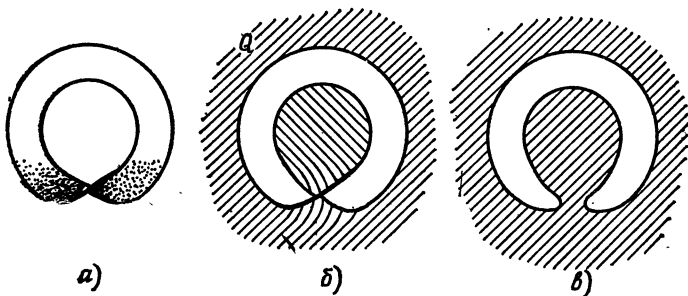


Рис. 80.

дыра, гомеоморфная кругу. Так как поверхности, изображенные на рис. 80, а и б, имеют одинаковый край, то можно склеить их краями, т. е. *вклеить ленту Мёбиуса в круглую дыру, вырезанную в поверхности Q* . Правда, при этом лента Мёбиуса окажется пересекающей с поверхностью Q , но мы будем считать, что пересечение возникает лишь из-за «неудачного» расположения в пространстве.

Заклеивание дыры лентой Мёбиуса можно описать и иначе. Разрежем ленту Мёбиуса по ее средней линии. Для этого мы должны сначала склеить боковые стороны прямоугольника (с перекручиванием — чтобы

получилась лента Мёбиуса), а затем произвести разрез по линии mpr (рис. 81, а). Но можно выполнить действия в обратном порядке: сначала разрезать прямоугольник по линии mpr (рис. 81, б), а затем произвести склеивание боковых отрезков (с учетом направления стрелок). Для склеивания повернем нижнюю половину прямоугольника «наизнанку» (рис. 81, в) и расположим половинки, как на рис. 81, г. Теперь нетрудно произвести необходимые

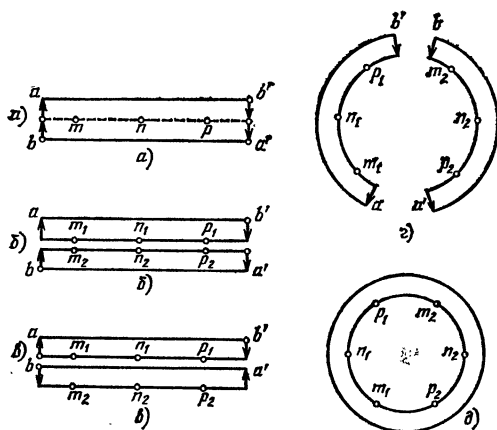


Рис. 81.

склеивания (рис. 81, д). Мы видим, что разрезание ленты Мёбиуса по средней линии дает фигуру, гомеоморфную кольцу. На рис. 81 показаны точки, получившиеся из точек m , n , p при разрезании по средней линии. На рис. 81, д одинаково обозначенные точки являются диаметрально противоположными. Обратное склеивание снова превращает кольцо в ленту Мёбиуса. Следовательно, если на одной окружности кольца склеить между собой каждые две диаметрально противоположные точки, то мы получим ленту Мёбиуса.

Пусть теперь l — контур круглой дыры на некоторой поверхности Q . Вырежем из поверхности узкую полосу (кольцо) вокруг дыры l и обозначим через l' наружный контур этого кольца (рис. 82). Тогда получится поверхность, гомеоморфная Q (только с несколько большей дырой l'), и отдельно кольцо. Склеим теперь на контуре l отрезанного кольца каждые две диаметрально противоположные точки; тогда кольцо превратится в ленту

Мёбиуса. Эту ленту Мёбиуса мы и вклеим в дыру l' . В результате мы вклеим в поверхность Q (точнее, в поверхность, гомеоморфную ей) ленту Мёбиуса. Но разрезание поверхности по контуру l' и обратное склеивание этого разреза можно было и не делать: достаточно было просто склеить на контуре l каждые две диаметрально противоположные точки. Итак, склеивание каждой двух диаметрально противоположных точек на контуре круглой дыры равносильно вклеиванию в эту дыру ленты Мёбиуса.

Пример 27. В проективной геометрии к точкам обычной (евклидовой) плоскости присоединяются *несобственные* (бесконечно удаленные) точки. Присоединение бесконечно удаленных точек производится таким образом, что к каждой прямой, проходящей в евклидовой плоскости, присоединяется одна бесконечно удаленная точка, причем для всех параллельных между собой прямых эта бесконечно удаленная точка одна и та же (т. е. параллельные прямые «пересекаются в бесконечности»), а для

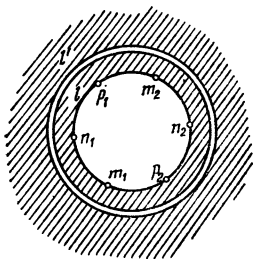


Рис. 82.

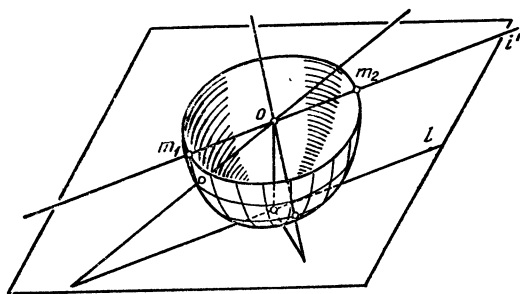


Рис. 83.

непараллельных прямых бесконечно удаленные точки различны. Плоскость, пополненная бесконечно удаленными точками, называется *проективной плоскостью*.

Чтобы выяснить топологическую структуру проективной плоскости, рассмотрим полусферу с центром o , касающуюся плоскости и расположенную так, что диаметрально плоскость полусферы параллельна плоскости (рис. 83). Центральное проектирование из точки o явля-

ется гомеоморфным отображением открытой полусферы (получающейся выбрасыванием из полусферы всех точек ограничивающей ее окружности) на всю евклидову плоскость.

Проведем теперь через точку касания полусферы прямую l на плоскости, а через точку o — прямую l' , параллельную l . Прямые l и l' «пересекаются в бесконечности» так, что точки m_1 и m_2 , в которых прямая l' пересекается с краем полусферы, «проектируются» (вдоль прямой l') в одну и ту же точку — в бесконечно удаленную точку прямой l . Следовательно, отображение *п о л у с ф е р ы с к р а е м* на плоскость, пополненную бесконечно удаленными точками (т. е. на проективную плоскость), не является взаимно однозначным: двум различным точкам m_1, m_2 на крае полусферы соответствует одна и та же точка проективной плоскости. Чтобы это отображение стало взаимно однозначным (и гомеоморфным), нужно *с к л е и т ь* между собой каждые две диаметрально противоположные точки на крае полусферы. Иначе говоря, проективная плоскость гомеоморфна полусфере, к краю которой приклеена лента Мёбиуса (или сфере с одной дырой, которая заклеена лентой Мёбиуса). Из этого следует, что проективная плоскость (в отличие от евклидовой) является *о д н о с т о р о н н е й* поверхностью.

Теперь мы можем сформулировать вторую половину теоремы Мёбиуса—Жордана о классификации поверхностей, а именно, дать перечисление всех топологически различных типов замкнутых *н е о р и е н т и р у е м ы х* поверхностей. Обозначим через N_q поверхность, получающуюся из сферы вырезыванием в ней q дыр и заклеиванием их всех лентами Мёбиуса. Оказывается, что *поверхности*

$$N_1, N_2, \dots, N_q, \dots \quad (12)$$

и дают полную топологическую классификацию замкнутых неориентируемых поверхностей.

Задачи

81. Докажите, что если в поверхности N_q вырезать круглую дыру, то получающаяся поверхность с краем может быть расположена в трехмерном пространстве без самопересечений.

У к а з а н и е: получающаяся поверхность гомеоморфна рассмотренной в задаче 62.

82. Докажите, что эйлерова характеристика поверхности N_q равна $2 - q$.

83. На сфере вырезаны $m + n + p$ дыр; m из них заклеены ручками, а n — лентами Мёбиуса. Докажите, что эйлерова характеристика получившейся поверхности с краем равна $2 - 2m - n - p$.

84. Докажите, что граф «4 домика и 4 колодца» (ребрами которого являются соединяющие тропинки — по одной от каждого домика к каждому колодцу) не может быть размещен без самопересечений на проективной плоскости, но может быть расположен на торе.

85. На поверхности Q удалось начертить граф « m домиков и n колодцев». Докажите, что $\chi(Q) \leq m + n - \frac{mn}{2}$.

86. Какой из поверхностей (12) гомеоморфна бутылка Клейна? Проективная плоскость?

87. Какие поверхности получаются, если на рис. 84, а, б, в, г склеить (с учетом направлений) стороны, помеченные одинаковыми буквами?

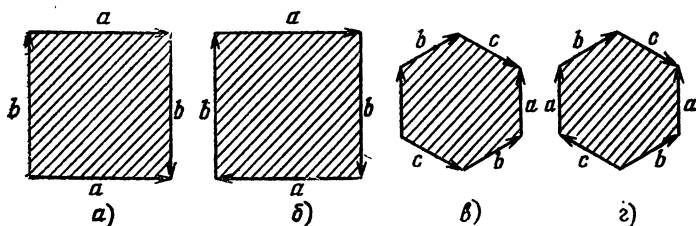


Рис. 84.

88. В трехмерном пространстве R^3 взята лента Мёбиуса, а в четырехмерном пространстве R^4 , содержащем R^3 , взята точка $p \notin R^3$. К ленте Мёбиуса добавлены все прямолинейные отрезки, соединяющие p с точками, лежащими на крае ленты Мёбиуса. Докажите, что получившаяся поверхность гомеоморфна проективной плоскости. Докажите, что любая поверхность N_p может быть расположена в R^4 без самопересечений.

Поверхности (12) попарно не гомеоморфны, так как имеют различные эйлеровы характеристики (задача 82). Поэтому для доказательства того, что поверхности (12) дают полную топологическую классификацию замкнутых неориентируемых поверхностей, остается установить, что каждая замкнутая неориентируемая поверхность гомеоморфна одной из поверхностей (12). Это доказывается точно так же, как и в пункте 12. Разница будет, во-первых, в том, что лента L (см. рис. 70) теперь может оказаться гомеоморфной ленте Мёбиуса (поскольку рассматриваются неориентируемые поверхности). В этом случае поверхность Q_1^* , получившаяся после вырезания полосы L , будет иметь одну новую компоненту края (так как край полосы L , т. е. ленты Мёбиуса, гомео-

морфен окружности). Наоборот, Q_{i+1} получается из Q_i^* приклеиванием полоски L к одному из контуров, принадлежащих краю поверхности Q_i^* , т. е. Q_{i-1} получается из Q_i^* *заклеиванием одной дыры лентой Мёбиуса*. Во-вторых, разница будет в том, что склеивание контуров l_1 и l_2 на рис. 72—73 теперь может производиться с учетом не обязательно противоположной ориентации на них (что равносильно вклеиванию ручки, рис. 75), но, возможно, с учетом о д и н а к о в о й ориентации контуров. В этом случае поверхность Q_{i-1} получается из Q_i^* *заклеиванием двух дыр лентами Мёбиуса* (задача 89). Таким образом, рассуждение, проведенное в пункте 12, показывает, что *любая замкнутая неориентируемая поверхность Q получается из сферы вырезанием $k + q$ дыр и заклеиванием k дыр ручками, а q дыр — лентами Мёбиуса*. При этом $q \geq 1$, так как при $q = 0$ мы получили бы о р и е н т и р у е м у ю поверхность P_k , а по условию поверхность Q была неориентируемой. Остается заметить, что если в поверхность вклеена хотя бы одна лента Мёбиуса, то вклеивание ручки равносильно вклеиванию д в у х лент Мёбиуса (задача 90). Поэтому поверхность Q , получающаяся из сферы вырезанием $k + q$ дыр и вклеиванием k ручек и q лент Мёбиуса (где $q \geq 1$), гомеоморфна сфере, в которой вырезаны $2k + q$ дыр и все они заклеены лентами Мёбиуса. Иначе говоря, Q гомеоморфна одной из поверхностей (12).

Задачи

89. В круге вырезаны две дыры, и их контуры l_1, l_2 склеены с учетом одинаковой ориентации на них. Докажите, что это эквивалентно заклеиванию обеих дыр лентами Мёбиуса.

У к а з а н и е. Произведем дополнительные разрезы по линиям at_1a' , $ср_1с'$ (рис. 85, а) и перевернем «наизнанку» отрезанный кусок (рис. 85, б). Теперь склеивание контуров l_1 и l_2 осуществляется непосредственно (рис. 85, в) и остается вновь склеить проведенные разрезы, т. е. склеить «диаметрально противоположные» точки на двух контурах.

90. В круге вырезаны три дыры и одна из них заклеена лентой Мёбиуса, а контуры двух других дыр склеены с учетом противоположной ориентации на них (ручка). Докажите, что это равносильно заклеиванию всех трех дыр лентами Мёбиуса.

У к а з а н и е. Проведем дополнительный разрез m_1abm_2 , а затем вывернем отрезанный кусок «наизнанку» (рис. 86). Мы получаем «серповидную» дыру, на контуре которой склеиваются каждые две «диаметрально противоположные» точки, и еще два контура, которые надо склеить с учетом о д и н а к о в о й ориентации на них.

91. Сформулируйте и докажите теорему о топологической классификации неориентируемых поверхностей с краем.

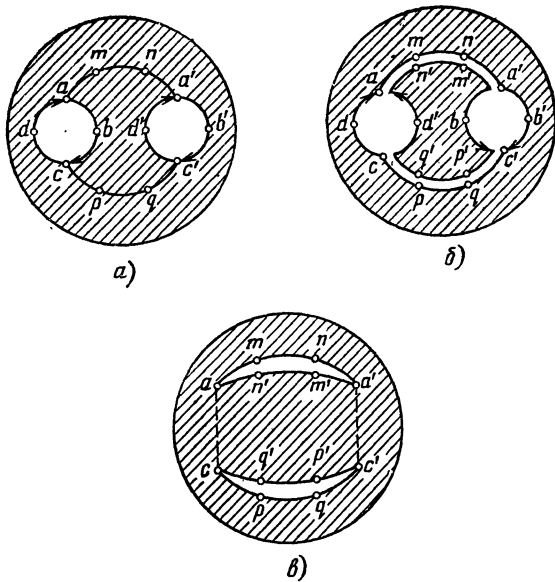


Рис. 85.

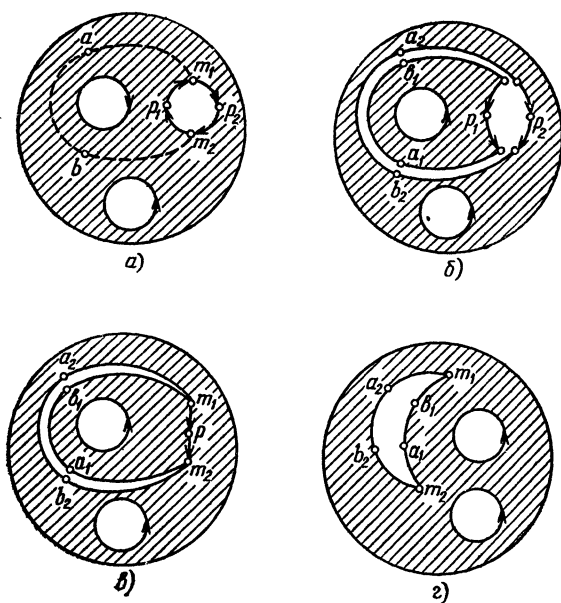


Рис. 86.

14. Векторные поля на поверхностях

Вопрос, который рассматривается в этом пункте, заключается в следующем. Можно ли на заданной ориентируемой поверхности Q построить непрерывное поле направлений, т. е. выбрать в каждой ее точке такой ненулевой касательный вектор, что при переходе от точки к точке вектор меняется непрерывно?

Пример 28. На сфере направление с севера на юг (рис. 87, а) имеет особые точки в полюсах; в этих точках

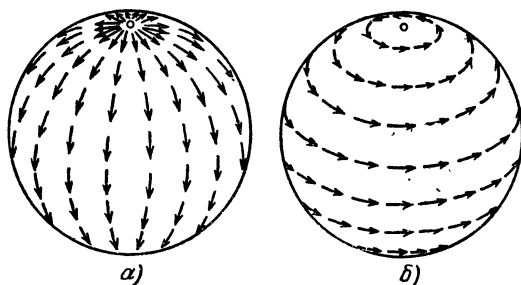


Рис. 87.

векторы направлены в разные стороны и непрерывность нарушается. То же можно сказать о направлении с запада на восток (рис. 87, б). Вообще, как мы увидим дальше,

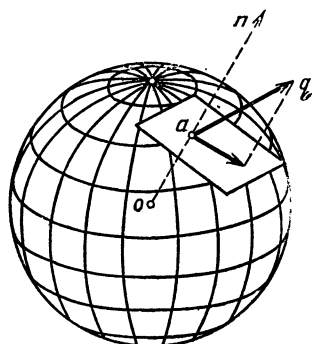


Рис. 88.

на всей сфере не существует непрерывного поля направлений. Это иногда формулируют в виде «теоремы о еже»: если из каждой точки поверхности сферы растет «колючка» (ненулевой вектор, не обязательно касающийся сферы) и направления «колючек» от точки к точке меняются непрерывно, то найдется хотя бы одна «колючка», перпендикулярная к сфере. Действительно, в противном случае, спроектировав каждую «колючку» $\vec{a}q$ на касательную

плоскость, проведенную в точке a , из которой эта «колючка» растет (рис. 88), мы получили бы на всей сфере непрерывное поле ненулевых касательных векторов, а это невозможно.

На рис. 89, а, б показан вид векторных полей, рассмотренных в примере 28, вблизи северного полюса, а на рис. 89, в — более сложная особая точка (так называемое седло). Когда мы один раз обойдём особую точку (например, против часовой стрелки), направления векторов совершат в случаях, изображенных на рис. 89, а) и б) один

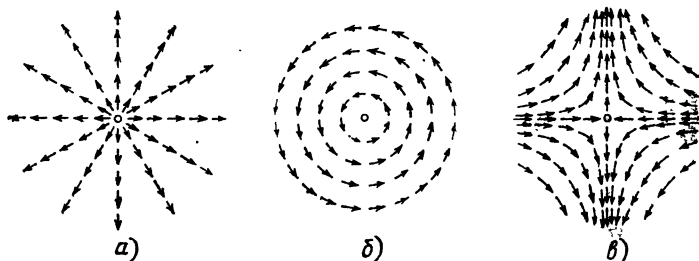


Рис. 89.

поворот в том же направлении (рис. 90, а, б), а в случае рис. 89, в) — один поворот, но уже в противоположном направлении (рис. 90, в). В связи с этим говорят, что особая точка на рис. 89, а (и на

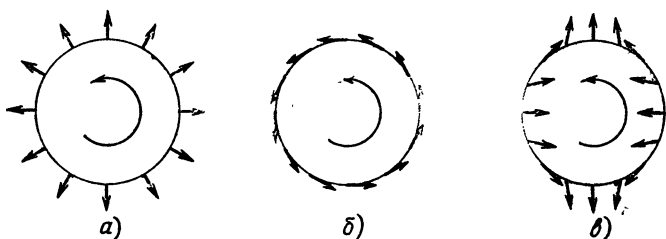


Рис. 90.

рис. 89, б) имеет индекс $+1$, а особая точка на рис. 89, в) — индекс -1 .

Выдающийся французский математик Анри Пуанкаре (1854—1912) доказал, что если на замкнутой ориентируемой поверхности Q задано поле ненулевых касательных векторов, непрерывное всюду, кроме конечного числа особых точек, то сумма индексов всех особых точек равна $\chi(Q)$.

Пример 29. Так как $\chi(P_k) = 2 - 2k$, то $\chi(P_k) \neq 0$ при $k \neq 1$. Следовательно, на ориентируемой поверхности, отличной от тора P_1 , не существует непре-

рывного поля ненулевых касательных векторов без особых точек. На торе же векторное поле существует (например, можно взять векторы, направленные вдоль параллелей).

Доказательство теоремы Пуанкаре проведем в два этапа: сначала докажем, что для любых двух векторных полей сумма индексов одинакова, а затем построим поле, для которого эту сумму легко вычислить.

Пусть на поверхности Q заданы два ненулевых векторных поля с конечным числом особых точек. Вектор первого поля в точке x обозначим через $v_1(x)$, а вектор второго поля — через $v_2(x)$. Разобьем Q на маленькие многоугольники так, чтобы в каждом многоугольнике было не более одной особой точки каждого поля и все особые точки лежали в н у т р и м н о г о у г о л ь н и к о в.

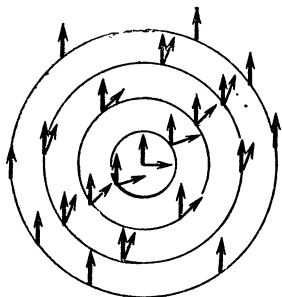


Рис. 91.

Заметим, что если x не является особой точкой поля v_1 , то вблизи точки x мы можем повернуть векторы этого поля, оставляя его непрерывным (рис. 91: по мере увеличения радиуса окружности векторы поворачиваются все меньше).

Пользуясь этим, повернем векторы поля v_1 вблизи вершин таким образом, чтобы в каждой вершине x_0 векторы $v_1(x_0)$ и $v_2(x_0)$ совпали (рис. 92).

Так как поверхность Q ориентируема, то на ней можно указать положительное направление отсчета углов (скажем, против часовой стрелки, если смотреть на поверхность с внешней стороны).

Возьмем теперь некоторое ребро r_1 (рис. 92) и выберем на нем направление (например, от вершины a к b). Будем сначала, двигаясь от a к b в этом направлении, следить за вектором $v_1(x)$, а потом, возвращаясь от b к a , следить за вектором $v_2(x)$. Когда мы пробежим ребро r_1 туда и обратно, вектор, за которым мы следим, непрерывно перемещаясь, вернется к прежнему положению (поскольку $v_1(a) = v_2(a)$ и $v_1(b) = v_2(b)$). Число оборотов, которое совершает этот вектор (учитывая выбранное направление отсчета углов), обозначим через $d(r_1)$. На рис. 92 имеем $d(r_1) = 1$, $d(r_2) = 0$, $d(r_3) = -1$. Заметим, что если на ребре r_1 взять противоположное направление (от b к a), то $d(r_1)$ изменит знак (так как вектор, за которым мы

следим, будет поворачиваться в обратном направлении).

Пусть M — один из многоугольников. Когда мы обойдем его контур (в положительном направлении), вектор $v_1(x)$ совершит некоторое число оборотов — обозначим это число через $z_1(M)$, — а вектор $v_2(x)$ совершит $z_2(M)$ оборотов.

Обозначим через r_1, r_2, \dots, r_k стороны многоугольника M и зададим на них направления, соответствующие положительному обходу его контура (см. рис. 92). Обойдем

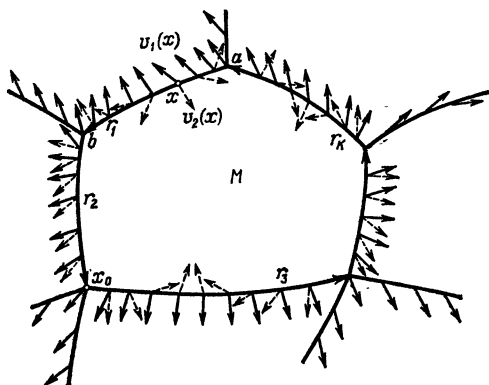


Рис. 92.

контур (начиная от точки a) в положительном направлении, следя за вектором $v_1(x)$, а затем (после возвращения в a) обойдем контур в противоположном направлении, наблюдая за вектором $v_2(x)$. В результате наблюдаемый вектор совершит $z_1(M) - z_2(M)$ оборотов. Но мы можем следить за поворотами векторов «по частям»: наблюдая $v_1(x)$ при движении по ребру r_1 и $v_2(x)$ при обратном движении по ребру r_1 ; далее, наблюдая $v_1(x)$ при прохождении ребра r_2 и $v_2(x)$ при обратном движении по ребру r_2 и т. д. В этом случае мы насчитаем $d(r_1) + d(r_2) + \dots + d(r_k)$ оборотов. Так как суммарный поворот не зависит от того, в каком порядке складывать углы поворота вектора на каждом из ребер, то

$$z_1(M) - z_2(M) = d(r_1) + d(r_2) + \dots + d(r_k). \quad (13)$$

Из формулы (13) нетрудно вывести соотношение

$$\sum z_1(M) = \sum z_2(M), \quad (14)$$

в котором суммирование производится по всем многоугольникам. В самом деле, просуммируем равенства (13) по всем многоугольникам. В правой части получившейся суммы каждое ребро r встретится два раза, так как к нему примыкают два многоугольника M_1 и M_2 (рис. 93). Но при положительном обходе контура M_1 ребро r получит одно направление, а при положительном

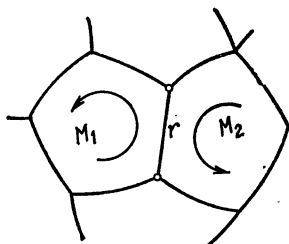


Рис. 93.

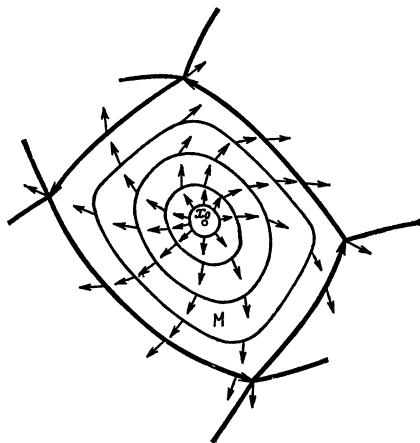


Рис. 94.

обходе контура M_2 — противоположное направление. Следовательно, в правой части один раз встретится $d(r)$, а второй раз $-d(r)$. Так как это произойдет с каждым ребром, то $\sum z_1(M) - \sum z_2(M) = 0$.

Пусть M — некоторый многоугольник и x_0 — особая точка поля $v_1(x)$, расположенная в нем. Построим систему простых замкнутых линий, соединяющую контур многоугольника M с окружностью, обходящей точку x_0 (рис. 94). При переходе от одной линии к близкой ей число оборотов вектора $v_1(x)$ должно измениться мало, поскольку поле $v_1(x)$ непрерывно. Но число оборотов является целым и потому «мало» измениться не может, т. е. остается постоянным при переходе от линии к линии. Но при обходе по контуру многоугольника M число оборотов равно $z_1(M)$, а при обходе по окружности вокруг точки x_0 получается индекс этой точки. Таким образом, число $z_1(M)$ равно индексу особой точки x_0 (если внутри M нет особых точек, то $z_1(M) = 0$). Из этого вытекает, что число $\sum z_1(M)$ равно сумме индексов в с е ж

особых точек поля $v_1(x)$. Аналогично, число $\sum z_2(M)$ равно сумме индексов поля $v_2(x)$. Из этого в силу (14) вытекает, что у обеих полей сумма индексов одинакова. Этим завершён первый этап.

Выберем теперь внутри каждого многоугольника «центр», а на каждом ребре — «сердину», и построим векторное поле, как показано на рис. 95: вдоль ребер векторы направлены от вершин к «сердине», из вершин

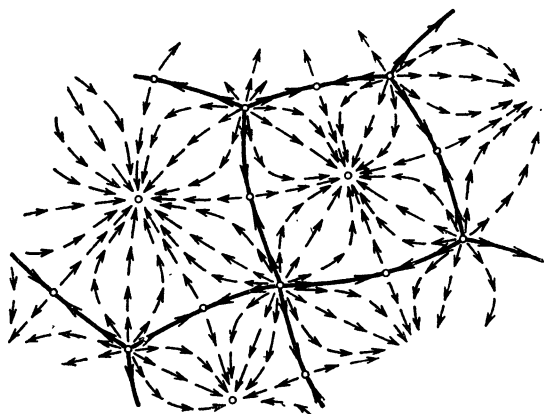


Рис. 95.



Рис. 96.

векторы выходят, а к «центрам» многоугольников приходят. Особыми точками этого поля на поверхности Q будут вершины, «середины» и «центры». При этом (рис. 96) индекс каждой особой точки в вершине и в «центре» равен $+1$, а индекс «середины» ребра равен -1 (седло). Следовательно, для этого поля (а потому и для любого другого) сумма индексов всех особых точек равна $B \cdot (+1) + P \cdot (-1) + G \cdot (+1) = \chi(Q)$.

Задачи

92. Докажите, что на всякой замкнутой поверхности существует векторное поле с единственной особой точкой.

93. Докажите, что на всякой поверхности с краем существует векторное поле без особых точек (направление векторов в точках края должно касаться поверхности, но может не быть касательным к краю).

94. Докажите, что теорема Пуанкаре остается справедливой для ориентируемой поверхности с краем, если в каждой точке края вектор направлен по касательной к этому краю.

95. Докажите теорему Брауэра: если $f: K \rightarrow K$ — произвольное непрерывное отображение круга K в себя, то существует (хотя бы одна) неподвижная точка, т. е. такая точка $x \in K$, которая переходит при отображении f в себя: $f(x) = x$.

У к а з а н и е. Если бы неподвижных точек не было, то, построив векторы, идущие из каждой точки x в точку $f(x)$, мы получили бы ненулевое непрерывное векторное поле без особенностей.

15. Проблема четырех красок

Области, на которые конечный граф G разбивает плоскость, назовем «странами». На рис. 97 страны А и Б пограничны (примыкают друг к другу по общему ребру). Страны Б и В также пограничны (у них даже два общих ребра). Страны А и В не являются пограничными: хотя у них есть общая точка (вершина), но нет общих ребер.

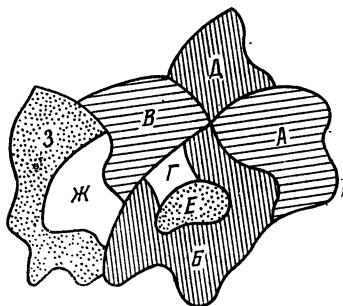


Рис. 97.

Мы хотим раскрасить страны в разные цвета, чтобы получилась «политическая карта». Разумеется, чтобы страны были хорошо видны, необходимо пограничные страны окрашивать в разные цвета. Однако в целях экономии количества красок разрешается непограничные страны окрашивать одним цветом. Какое минимальное количество красок нужно иметь, чтобы можно было раскрасить любую карту на плоскости?

Эта задача была сформулирована в 1852 году лондонским студентом Гутри, который обнаружил, что для различения графств на карте Англии достаточно четырех красок, и выдвинул гипотезу о том, что четырех цветов достаточно для раскраски любой карты. Спустя почти сорок лет английский математик Живуд

доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в пять цветов. Постепенно проблема четырех красок приобретала все больший интерес. В 1968 году Оре и Стемпл доказали, что любую карту, имеющую не более 40 стран, можно раскрасить в четыре цвета.

В настоящее время считается, что справедливость гипотезы четырех красок установлена. Слово «считается» употреблено в связи с тем, что известные сейчас решения этой проблемы базируются на применении ЭВМ и связаны с выполнением огромного, необозримого количества вычислений, причем проверка правильности вычислений практически невыполнима. Первое «машинное» решение было получено в 1976 году американскими математиками К. Аппелем и В. Хакеном. С помощью машины (которая «помогала» им постепенно усовершенствовать первоначальную программу) они разбили все возможные карты на почти 2000 (четко указанных) типов и составили машинную программу их исследования. Для каждого из этих типов *) машина решала (по составленной программе) задачу: *может ли в рассматриваемом типе карт найтись такая, которая не раскрашивается в четыре цвета?* Когда, выполнив десятки миллиардов арифметических и логических операций, машина давала ответ «Нет», переходили к следующему типу карт и т. д. Получив ответ «Нет» для всех типов карт, Аппель и Хакен объявили, что ими получено машинное решение проблемы четырех красок.

Однако гарантии в правильности этого «машинного» решения все же нет. Ведь в каком-то (скажем, семнадцатом) типе карт машина могла ответить «Нет» не в результате безупречного анализа, а из-за мимолетного сбоя в электронной схеме (что бывает нередко). Не зная об этом, вычислители переходят к восемнадцатому, девятнадцатому ... типу карт, фактически пропустив исследование семнадцатого типа. Не будет гарантии в правильности решения даже в том случае, если мы, затратив много месяцев, повторим уникальный машинный эксперимент: может быть, где-то в многомиллиардной цепочке вычислений, связанных с тем же семнадцатым типом, и в нашей машине произойдет сбой?

Новое машинное решение было предложено в 1978 году Д. Козном. Число типов карт было у него существ-

*) Кроме трех, которые были исследованы «вручную», поскольку машина с ними не справилась.

венно меньшим, причем результат машинных вычислений по каждому типу и подтипу он получал не в виде готового «Нет», а в форме, допускающей «ручную» проверку. Его не интересовало, каким путем шла машина при исследовании данного подтипа и сколько операций это потребовало; исследование подтипа считалось завершенным, когда машина находила достаточно короткий путь проверки окончательного «Нет». Решение проблемы четырех красок, найденное Коэном, изложено в книге среднего объема и формата. По его мнению, проверка этого решения может быть, при желании, выполнена вручную одним человеком в течение двух-трех лет (!) ежедневной восьмичасовой работы. Однако «скептики» считают, что и это решение малоприемлемо: вряд ли человек, занимавшийся с утра до вечера в течение двух лет нудным перебором вариантов, может гарантировать, что он нигде не допустил ни одной ошибки.

Задачи

96. На плоскости (или на сфере) начерчен граф, все вершины которого имеют четные индексы. Докажите, что получившаяся карта может быть раскрашена в два цвета.

У к а з а н и е: воспользуйтесь понятием индекса пересечения. 97. Докажите, что для раскраски любой карты на плоскости (или на сфере) достаточно пяти цветов.

98. На некоторой поверхности начерчен такой граф, что из каждых двух пограничных стран хотя бы одна является треугольником. Докажите, что эту карту можно раскрасить в четыре цвета.

99. Проведено n «перегородок», идущих от одной из concentрических окружностей к другой. Сколько нужно цветов для раскрашивания получившейся карты?

16. Раскрашивание карт на поверхностях

Пример 30. Хивуд доказал, что *любую карту на торе можно раскрасить семью красками* (это вытекает из доказываемого ниже неравенства (16)). Он привел также пример, показывающий, что *меньше, чем семью цветами, обойтись нельзя*. При склеивании противоположных сторон прямоугольник (рис. 98) превращается в тор с семью странами на нем (рис. 99). *Каждые две страны пограничны, т. е. все семь стран должны быть раскрашены в разные цвета.*

Если любая карта на поверхности Q допускает раскраску в n цветов, но существует карта, для раскраски которой нельзя обойтись меньшим числом цветов, то n называется *хроматическим числом* поверхности Q ; оно

обозначается через $\text{col}(Q)$. Для сферы и тора имеем, согласно сказанному выше, $\text{col}(P_0) = 4$, $\text{col}(P_1) = 7$. Вообще, для произвольной замкнутой поверхности Q , отличной от бутылки Клейна N_2 , хроматическое число дается формулой Хивуда:

$$\text{col}(Q) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(Q)}}{2} \right\rfloor, \quad (15)$$

где квадратные скобки означают целую часть, а для бутылки Клейна имеем $\text{col}(N_2) = 6$.

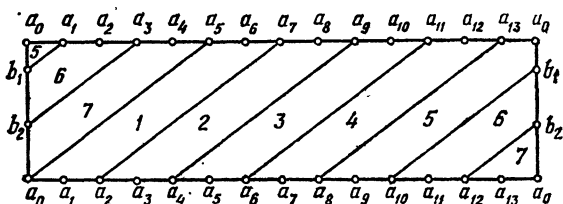


Рис. 98.

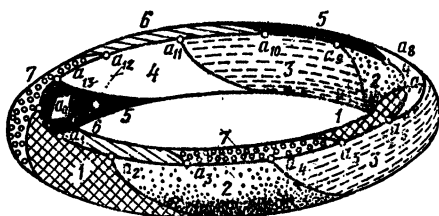


Рис. 99.

Эти результаты получены усилиями нескольких поколений математиков. Хивуду принадлежит доказательство неравенства

$$\text{col}(Q) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(Q)}}{2} \right\rfloor. \quad (16)$$

Оставалось установить, что на поверхности Q , отличной от бутылки Клейна, существует карта, для раскраски которой нельзя обойтись меньшим, чем указано в (15), числом цветов. Вначале такие карты были построены для нескольких первых поверхностей в последовательностях (7), (12). Доказательство существования требуемой карты для любой неориентируемой поверхности было

получено Рингелем (1954), а для ориентируемой — Рингелем и Янгсом (1968).

Приведем доказательство неравенства (16). Пусть на поверхности Q начерчена карта, требующая для своей раскраски s цветов, где $s = \text{col}(Q)$. Выберем внутри каждой страны точку («столицу»). Для каждой двух пограничных стран проведем по территории этих стран одну «железную дорогу», соединяющую их столицы (рис. 100), причем так, чтобы различные «железные

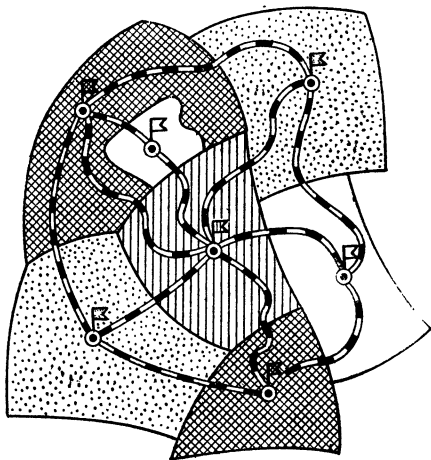


Рис. 100.

дороги» не пересекались. Вместо окраски страны в некоторый цвет мы можем водрузить в ее «столице» флаг, имеющий этот цвет; если при этом две «столицы» соединены «железной дорогой» (т. е. страны пограничны), то их флаги должны иметь разный цвет. Таким образом, надо «окрасить» вершины графа G^* (ребрами которого являются «железные дороги») таким образом, чтобы любые две смежные вершины (соединенные ребром) имели разный цвет. Ясно, что *хроматическое число* графа G^* , т. е. наименьшее число цветов, требуемых для такой его раскраски, равно s .

Выбросим из G^* некоторую вершину a и все примыкающие к ней ребра. Если при переходе к получившемуся графу G' хроматическое число не уменьшилось, то вместо G^* можно взять более простой граф G' . Возможно, в G' тоже можно провести выбрасывание вершины и т. д.

В конце концов мы получим «неупрощаемый» граф G^{**} , содержащийся в G^* , т. е. хроматическое число графа G^{**} равно c , но выбрасывание любой вершины графа G^{**} и примыкающих к ней ребер приводит к уменьшению хроматического числа. Число вершин и ребер графа G^{**} обозначим через V и P , а число областей, на которые этот граф разбивает поверхность Q , — через Γ . Тогда (см. задачу 72)

$$V - P + \Gamma \geq \chi(Q). \quad (17)$$

К каждой вершине графа G^{**} примыкает не менее $c - 1$ ребер. В самом деле, допустим, что к вершине

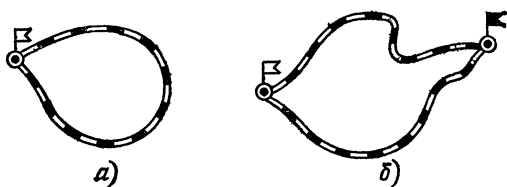


Рис. 101.

$b \in G^{**}$ примыкает k ребер $[bq_1], \dots, [bq_k]$, где $k < c - 1$. Выбросив из G^{**} вершину b и эти ребра, мы получим граф G'' с меньшим, чем c , хроматическим числом. Раскрасим этот граф в $c - 1$ цвет. Так как $k < c - 1$, то из $c - 1$ цвета, в которые окрашен граф G'' , хотя бы один цвет не использован для окраски вершин q_1, \dots, q_k . Окрасив вершину b в этот неиспользованный цвет, мы получим окраску графа G^{**} в $c - 1$ цвет, что, однако, противоречит выбору графа G^{**} .

Итак, к каждой вершине графа G^{**} примыкает не менее $c - 1$ ребра. Из этого (см. задачу 20) вытекает неравенство

$$(c - 1) V \leq 2P. \quad (18)$$

Далее, каждая из областей, определяемых графом G^{**} , имеет не менее трех ребер. Действительно, наличие «одноугольника» (рис. 101, а) означало бы существование «железной дороги», идущей из столицы в ту же самую столицу (без захода в другие столицы), а наличие «двухугольника» (рис. 101, б) означало бы, что некоторые две «столицы» соединены двумя дорогами; но мы таких дорог не проводили.

Пересчитав теперь ребра по всем Γ областям, мы насчитаем не менее 3Γ ребер; при этом каждое ребро засчитывается дважды (так как к нему примыкают две области). Следовательно, $3\Gamma \leq 2P$, т. е. $\frac{2}{3}P - \Gamma \geq 0$. Прибавляя это неравенство к (17), получаем $B - \frac{1}{3}P \geq \chi(Q)$ или, иначе, $2P \leq 6B - 6\chi(Q)$. Учитывая (18), получаем теперь $(c-1)B \leq 6B - 6\chi(Q)$, т. е.

$$c-1 \leq 6 - \frac{6\chi(Q)}{B}, \quad (19)$$

Теперь нетрудно завершить доказательство. Пусть сначала поверхность Q гомеоморфна сфере: $Q = P_0$. Тогда $\chi(Q) = 2$, т. е. доказываемое неравенство (16) принимает вид $\text{col}(Q) \leq 4$. Это неравенство справедливо, поскольку проблема четырех красок решена.

Пусть теперь $Q = N_1$, т. е. $\chi(Q) = 1$. Доказываемое неравенство (16) принимает вид $\text{col}(Q) \leq 6$. Это неравенство справедливо, так как из (19) следует, что $c-1 \leq 6 - \frac{6}{B}$ и потому $c-1 \leq 5$ (поскольку число $c-1$ — целое).

Пусть, наконец, Q — замкнутая поверхность, отличная от P_0 и N_1 . Тогда $\chi(Q) \leq 0$ (задачи 70, 82). Так как $B \geq c$ (иначе граф G^{**} можно было бы раскрасить в $c-1$ цвет), то $-\frac{6\chi(Q)}{B} \leq -\frac{6\chi(Q)}{c}$, и потому, согласно (19), $c-1 \leq 6 - \frac{6\chi(Q)}{c}$, т. е. $c^2 - 7c + 6\chi(Q) \leq 0$. Это означает, что число c принадлежит отрезку, концами которого являются корни квадратного трехчлена $x^2 - 7x + 6\chi(Q)$ (корни действительны, поскольку $6\chi(Q) \leq 0$). Следовательно, c не превосходит большего из этих корней, т. е.

$$c \leq \frac{1}{2} (7 + \sqrt{49 - 24\chi(Q)}).$$

Таким образом, неравенство (16) справедливо и в этом случае.

Задачи

100. Поверхность Q получается из сферы вырезыванием $k+q$ дыр и заклеиванием k из них ручками. Докажите, что $\text{col}(Q) = \text{col}(P_k)$.

101. Поверхность Q получается из сферы вырезыванием $k+q$ дыр и заклеиванием q из них лентами Мёбиуса. Докажите, что $\text{col}(Q) = \text{col}(N_q)$. В частности, хроматическое число ленты Мёбиуса равно 6.

102. Приведите пример карты на проективной плоскости (или на ленте Мёбиуса), которую нельзя раскрасить пятью цветами.

103. Чему равно хроматическое число графа, вершинами и ребрами которого служат вершины и ребра n -угольника?

104. Каково хроматическое число графа « m домиков и n колодцев»?

105. Докажите, что существует граф, не вложимый в заданную поверхность.

106. Граф G с хроматическим числом 2 имеет n вершин. Какое максимальное число ребер может иметь этот граф?

107. Докажите, что если на заданной поверхности начерчена карта с достаточно маленькими странами, то ее можно раскрасить в 7 цветов.

108. Докажите, что если на поверхности Q можно начертить граф, имеющий хроматическое число c , то $\text{col}(Q) \geq c$.

109. Докажите, что на бутылке Клейна можно начертить полный граф с шестью вершинами. Выведите отсюда, что $\text{col}(N_2) \geq 6$.

17. «Дикая сфера»

Мы рассмотрим здесь вопросы, связанные с пространственной теоремой Жордана, но прежде поговорим об *индексе пересечения* в пространстве.

Пусть Q — поверхность (возможно, имеющая край), составленная из плоских многоугольников, и G — граф, ребрами которого являются прямолинейные отрезки. Будем говорить, что G и Q *находятся в общем положении*, если вершины графа не принадлежат Q , а его ребра не имеют общих точек с ребрами поверхности Q . Если при этом число точек пересечения графа с поверхностью *четно*, то будем писать $J(G, Q) = 0$, а если *нечетно*, то $J(G, Q) = 1$. Число $J(G, Q)$ назовем *индексом пересечения* графа G с поверхностью Q .

Как и в п. 5, доказывается, что *если поверхность Q не имеет края, а граф G представляет собой цикл (т. е. в каждой его вершине сходится четное число ребер), то $J(G, Q) = 0$.*

Задачи

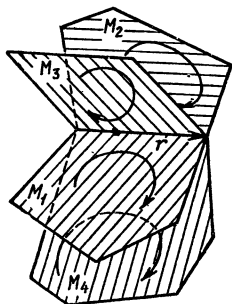
110. Условимся говорить, что объединение конечного числа многоугольников в пространстве представляет собой *двумерный цикл* (по модулю 2), если эти многоугольники не имеют общих внутренних точек и к каждому ребру (мы считаем «ребрами» стороны многоугольников) примыкает четное число многоугольников. Докажите, что равенство $J(G, Q) = 0$ остается справедливым, если G — одномерный, а Q — двумерный цикл (по модулю два), причем они находятся в пространстве в общем положении.

111. Пусть Q — двумерный цикл по модулю 2, который будем представлять себе «спаянным» из металлических многоугольников. Докажите, что области, на которые он разбивает пространство, мож-

но «залить жидкостями» двух цветов, так, чтобы к каждому многоугольнику примыкали с двух сторон разные по цвету «жидкости».

112. Докажите, что существует «пространственная карта», требующая для своей раскраски (или «заливки разноцветными жидкостями») не менее 1982 цветов.

113. Конечное множество ориентированных многоугольников в пространстве, которые не имеют общих внутренних



точек (но могут иметь общие ребра и вершины), образуют *двумерный целочисленный цикл*, если для каждого направленного ребра число положительно примыкающих к нему многоугольников (M_1 и M_4 на рис. 102) равно числу отрицательно примыкающих (M_2 и M_3 на рис. 102). Докажите, что если G — одномерный целочисленный цикл, а Q — двумерный целочисленный цикл в пространстве, то их индекс пересечения

$$J(G, Q) = \sum_{i, j} J(r_i, M_j)$$

Рис. 102.

равен нулю; здесь суммирование распространено на все направленные отрезки r_1, \dots, r_k , составляющие цикл G , и все составляющие цикл Q , причем $J(r_i, M_j) = +1$ или $J(r_i, M_j) = -1$, в зависимости от того, соответствуют ли ориентации *правилу буравчика* (рис. 103, а) или нет (рис. 103, б).

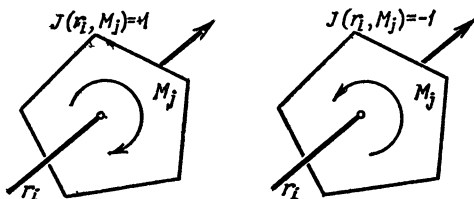


Рис. 103.

114. Пусть Q — двумерный целочисленный цикл, p и q — не принадлежащие ему точки. Проведем направленную ломаную x , идущую от точки p к q . Докажите, что индекс пересечения $J(x, Q)$ не зависит от выбора ломаной x , а определяется только точками p и q .

115. Пусть Q — двумерный цикл по модулю 2. Докажите, что его многоугольники можно ориентировать так, чтобы получился целочисленный цикл.

116. Пусть Q — двумерный целочисленный цикл. Докажите, что если существует направленная ломаная x (незамкнутая), для которой $J(x, Q) = n$, то Q разбивает пространство не менее, чем на $n + 1$ областей. Верно ли обратное?

С помощью понятия индекса пересечения по модулю 2 доказывается (примерно так же, как в п. 6) пространственный аналог теоремы Жордана: *всякая замкнутая поверхность Q , расположенная в трехмерном пространстве без самопересечений, разбивает пространство на две области; одна из них — ограниченная (она называется внутренней), а другая (внешняя) — неограниченная.* Заметим, что (хотя об этом не говорится в формулировке теоремы) поверхность, вложенная в трехмерное пространство без самопересечений, должна быть двусторонней: ведь она разбивает пространство на две области, т. е. имеет «две стороны». Этим подтверждается то, что замкнутая односторонняя поверхность не может быть вложена в трехмерное пространство без самопересечений.

Задачи

117. Из точки c проведен луч l , не встречающий ребер поверхности Q (составленной из плоских многоугольников). Докажите, что c в том и только в том случае принадлежит внутренней области, определяемой поверхностью Q , если луч l пересекает Q в нечетном числе точек.

118. Существует ли в пространстве множество, являющееся совместной границей трех областей?

В конце п. 6, где шла речь о «плоской» теореме Жордана, мы отметили, что объединение простой замкнутой линии и ее внутренней области гомеоморфно кругу. Справедливо ли аналогичное (на первый взгляд столь же «очевидное») пространственное утверждение: «объединение поверхности, гомеоморфной сфере, и ее внутренней области гомеоморфно шару»? Для наиболее простых поверхностей, гомеоморфных сфере (например, для выпуклых многогранников), это, действительно, верно. Однако в общем случае это «очевидное» утверждение неверно — интуиция здесь обманывает нас. Иными словами, *существует в трехмерном пространстве такая поверхность, гомеоморфная сфере, что объединение этой поверхности и ее внутренней области не гомеоморфно шару.* Построение такой «дикой сферы» связано с работами французского математика Антуана и американского математика Александра.

Прежде чем переходить к описанию «дикой сферы», рассмотрим вопрос о *стягиваемости линий*. Пусть l — простая замкнутая линия, расположенная в фигуре M .

Будем говорить, что линия l *стягиваема* в M , если существует поверхность P , гомеоморфная кругу и имеющая l своим краем, которая расположена (возможно, с сампересечениями) в фигуре M . Термин «стягиваемость» связан с тем, что на «круге» P можно начертить систему «концентрических окружностей», по которым l может быть постепенно стянута в точку.

Задачи

119. Докажите, что если M — открытый шар, то в M любая простая замкнутая линия стягиваема.

120. Докажите, что если фигура A состоит из конечного числа точек, что окружность l , расположенная в пространстве вне A , может быть вне A стянута.

У к а з а н и е. Если взять шар, содержащий l , то, «вдавливая» его, чтобы получались идущие внутрь трубки, можно построить тело, гомеоморфное шару, которое содержит внутри себя линию l , но не содержит точек множества A .

Утверждение, содержащееся в задаче 120, можно пояснить следующим образом. Если l — окружность, не проходящая через точки фигуры A (состоящей из конечного числа точек), то круг, натянутый на l . (даже

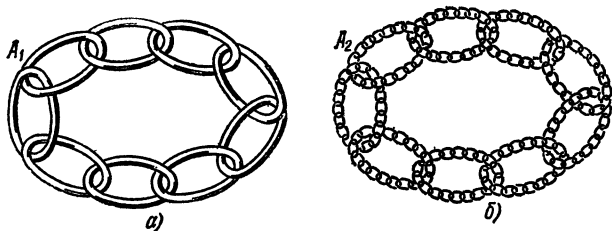


Рис. 104.

если он проходит через некоторые из точек фигуры A), может быть при помощи небольшой деформации «снят» с тех точек фигуры A , через которые он проходил. Может создаться впечатление, что в дополнительном пространстве произвольного нульмерного множества A любая окружность стягиваема. Однако это неверно.

Пример 31. Рассмотрим замкнутую цепь A_1 , состоящую из нескольких сцепленных звеньев (рис. 104, а). Далее, заменим каждое звено аналогичной замкнутой цепочкой из более мелких звеньев, проходящей внутри прежнего звена. Мы получим множество $A_2 \subset A_1$, состоящее из многих мелких звеньев (рис. 104, б). Теперь

каждое звено, составляющее множество A_2 , заменим замкнутой цепочкой еще более мелких звеньшек (располагающейся внутри прежнего звена). Мы получим множество $A_3 \subset A_2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \subset \dots$. Пересечение всех этих множеств представляет собой *антуановское множество* A^* .

Множество A^ нульмерно.* В самом деле, размеры звеньшек, составляющих множество A_n , неограниченно уменьшаются с ростом n , и потому в A^* не существует связанных множеств, отличных от точки.

Пусть теперь l_1 — окружность, сквозь которую проходит первоначально взятая цепочка A_1 , и K_1 — круг с границей l_1 . На рис. 105, а круг K_1 пересекает тор T_1 , служащий поверхностью одного из звеньев цепи, по двум окружностям (меридианам); одна из них обозначена через l_2 . Часть круга K_1 , ограниченная линией l_2 , представляет собой меньший круг K_2 . Этот меньший круг по отношению к части множества A_2 , расположенной внутри тора T_1 , находится в таком же положении, что и круг K_1 по

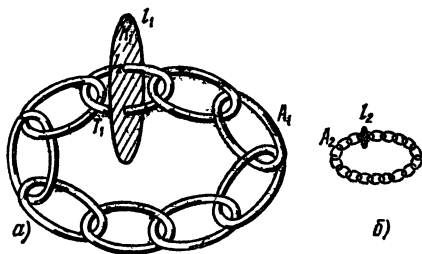


Рис. 105.

отношению ко всему множеству A_1 (рис. 105, б). Можно себе представить, что K_2 (а потому и K_1) пересекает один из торов (служащих границами звеньев множества A_2) по двум меридианам; один из них обозначим через l_3 и т. д. Таким образом, круг K_1 («пленка», натянутая на l_1) пересекается и с множеством A_1 , и с A_2 , и с A_3 и т. д., откуда вытекает, что K_1 пересекается и с предельным множеством A^* . Разумеется, на l_1 можно натянуть не только K_1 , но и иную пленку, являющуюся непрерывным образом круга; однако проведенное рассуждение поясняет, что *любая такая пленка пересекается с A^** (путь доказательства этого факта обсуждается в п. 25). Итак, *окружность l_1 не стягиваема во внешнем простран-*

стве антуановского множества A^* . Это нульмерное, как бы рассыпающееся на отдельные точки множество «мешает» провести пленку (являющуюся непрерывным образом круга), натянутую на l_1 .

Задачи

121. Докажите, что на l_1 можно натянуть пленку, гомеоморфную ручке и расположенную вне A^* .

122. Постройте простую замкнутую линию, проходящую через все точки антуановского множества.

Пример 32. Теперь мы в состоянии дать описание «дикий сферы». Пусть S — сфера, содержащая внутри себя множество A_1 и окружность l_1 (рис. 105, а). Продавим сферу S в нескольких местах, чтобы получились

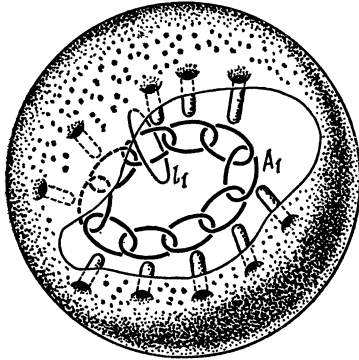


Рис. 106.

трубки, идущие внутрь и подходящие к каждому из торов, ограничивающих множество A_1 (рис. 106). Мы можем это сделать так, чтобы трубки не подходили к окружности l_1 . Полученная поверхность S_1 (сфера со вдавненными трубками) гомеоморфна сфере, а ее внутренняя область U_1 гомеоморфна открытому шару, причем линия l_1 лежит внутри U_1 . Теперь от концов трубок вдавим внутрь более узкие трубки, идущие внутри торов, ограничивающих

множество A_1 , и подходящие к звеньям множества A_2 . Мы получим поверхность S_2 , также гомеоморфную сфере, причем ее внутренняя область U_2 гомеоморфна открытому шару и содержит l_1 . Затем мы вдавим еще более узкие трубки, подходящие к звеньям множества A_3 , и т. д. На каждом шаге получается поверхность S_n , гомеоморфная сфере, причем ее внутренняя область U_n гомеоморфна открытому шару и содержит l_1 . Постепенно трубки становятся все короче, поверхность видоизменяется все меньше, и поэтому предельная поверхность S^* остается гомеоморфной сфере. Так как при этом «щупальцы», выпускаемые поверхностями S_n , все ближе подходят к A^* , то предельная сфера S^* содержит

множество A^* . Внутренняя область U^* сферы S^* не пересекается с антуановским множеством A^* (поскольку это множество лежит на границе S^* области U^*), т. е. вся область U^* целиком лежит вне A^* . Поэтому окружность l_1 , расположенная внутри U^* , не стягиваема в U^* (поскольку линия l_1 не стягиваема вне A^*). Из этого вытекает, что область U^* не гомеоморфна открытому шару (задача 119). Поэтому объединение поверхности S^* и ее внутренней области не гомеоморфно замкнутому шару.

18. Узлы

Если концы «нити», на которой завязан узел, не соединены, то узел можно «развязать». Поэтому в топологии рассматривают узлы только на замкнутых линиях.

Пример 33. На рис. 107 изображен *простой узел* (иногда его называют также «трилистником»).

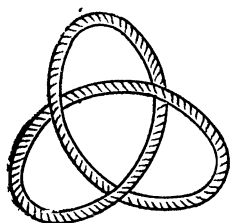


Рис. 107.

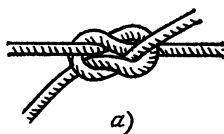


Рис. 108.

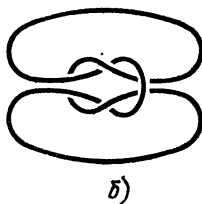
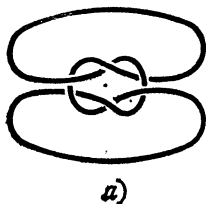


Рис. 109.

Пример 34. Обычный двойной узел (рис. 108, *a*) не следует смешивать с так называемым *морским узлом* (рис. 108, *b*); узел на рис. 108, *a* моряки пренебрежительно именуют «бабушкиным» узлом (он легче развязывается). На рис. 109 даны топологические схемы этих узлов.

С топологической точки зрения *узел* — это линия в трехмерном пространстве, гомеоморфная окружности. Разными узлами считаются такие, которые *неизотопны*. Представляется, например, наглядно очевидным, что «заузленная» и «незаузленная» линии на рис. 110

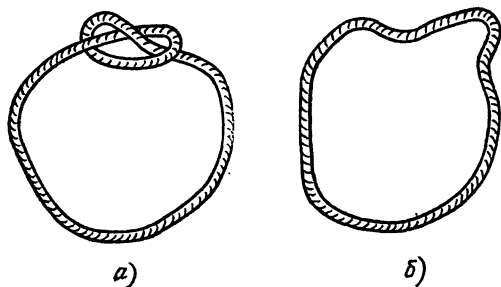


Рис. 110.

топологически неодинаково расположены (неизотопны). Доказательство этого факта мы рассмотрим позже (в п. 25).

Будем представлять себе узел реализованным в виде простой замкнутой ломаной l в пространстве и спроектируем ее на «горизонтальную» плоскость. Проекция узла l может оказаться пересекающей себя; при этом мы можем предполагать (немного сдвинув, если нужно, некоторые из звеньев), что проекция имеет лишь *двойные* точки пересечения (т. е. проекции никаких трех звеньев не имеют общей точки). Мы условимся на чертежах прерывать то из двух звеньев, пер

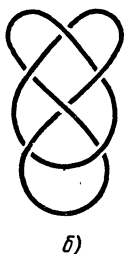
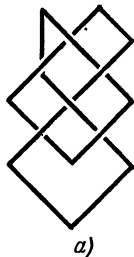


Рис. 111.

есекающихся на проекции, которое проходит и и же. В результате получится наглядный рисунок, так называемая нормальная проекция узла (рис. 111, а). Можно изображать узлы и в виде плавных линий на плоскости (без угловых точек), сохраняя те же соглашения о сплошных и прерванных участках (рис. 111, б).

Задачи

123. Докажите, что всякий целочисленный одномерный цикл можно представить в виде объединения нескольких ориентированных узлов, т. е. направленных контуров в пространст

ве, которые могут иметь общие вершины, но других общих точек попарно не имеют.

124. Докажите, что трижды перекрученная лента (рис. 112) гомеоморфна ленте Мёбиуса, а ее край изотопен простому узлу.

125. Докажите, что замысловатая «пряжка», изображенная на рис. 113, гомеоморфна ручке, а ее край изотопен простому узлу.

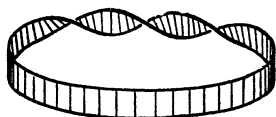


Рис. 112.

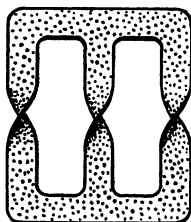


Рис. 113.

126. Докажите, что любая не гомеоморфная кругу поверхность (ориентируемая или неориентируемая), край которой гомеоморфен окружности, может быть так вложена в трехмерное пространство, что ее край будет простым узлом.

В связи с задачами 124—126 возникает вопрос, для любого ли узла L существует «натянутая на него пленка», т. е. поверхность (без самопересечений), имеющая L своим краем? Утвердительный ответ на этот вопрос дал Ф. Франкль (советский математик, приехавший к нам в 1934 году из Австрии) при помощи следующего изящного рассуждения. Нормальная проекция узла L разбивает плоскость на области, причем эту «карту» можно раскрасить в два цвета, например, белый и красный. Возможность такой «шахматной» раскраски вытекает из задачи 96, поскольку в каждой вершине получающегося в проекции графа сходятся четыре ребра. Мы можем при этом считать, что наружная (неограниченная) «страна» окрашена в белый цвет; на рис. 114, а контур узла показан без перерывов, чтобы ясно были видны «страны». Если теперь вновь наметить на проекции узла L разрывы, как на нормальной проекции, то чертеж станет пространственным, т. е. «красные» области окажутся соединенными с пере-

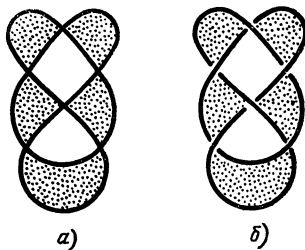


Рис. 114.

кручиваниями (рис. 114, б). Это и дает требуемую поверхность, имеющую узел L своим краем. Заметим, что получаемая поверхность, вообще говоря, неориентируема (см. рис. 112). Однако более «осторожное» приклеивание стран позволяет для любого узла построить ориентируемую поверхность, имеющую этот узел своим краем (см. задачи 130—132).

Задачи

127. Для каждого из узлов на рис. 115 изобразите указанным способом поверхность, имеющую этот узел своим краем. Какой из поверхностей, P_k или N_{2k} , с вырезанной в ней круглой дырой гомеоморфны эти поверхности?

128. Докажите, что переплетение Франкля в том и только в том случае неориентируема, если существует простая замкнутая линия, проходящая по «красным» областям и нечетное число раз переходящая из страны в страну через двойные точки (рис. 116).

129. Докажите, что если имеется переплетение, т. е. объединение нескольких простых замкнутых линий в пространстве (рис. 117), которые попарно не пересекаются друг с другом, то существует связная поверхность без самопересечений, имеющая своим краем это переплетение.

130. Пусть L — переплетение. Выберем на каждой из его линий направление обхода и обозначим через z одномерный целочисленный цикл, являющийся нормальной проекцией переплетения L . Фиксируем во внешней области точку o и каждой стране M , на которые цикл z разбивает плоскость, припишем число $k(M)$, равное индексу пересечения $J(x, z)$, где x — направленная ломаная, идущая от точки o к некоторой внутренней точке страны M (рис. 118). Докажите, что если M_1 — страна, для которой $|k(M)|$ принимает наибольшее значение, то те части цикла z , которые составляют границу страны M_1 , имеют направления, образующие обход контура страны M_1 (по или против часовой стрелки).

131. В условиях задачи 130 выбросим из цикла z участки, составляющие контур страны M_1 (с некоторым запасом) и вместо них добавим «перемычки» (пунктир на рис. 119, а), в результате чего получится цикл z' , имеющий меньшее число стран, чем z . Аналогичное построение проведем и на переплетении L ; получится переплетение L' , проектирующееся в цикл z' . Выброшенные участки дополним такими же перемычками и натянем на полученный контур поверхность P , гомеоморфную кругу и имеющую вблизи перемычек перекрученные «лопасти» (см. рис. 119, б). Докажите, что если на L' натянута ориентируемая пленка Q , то при подклеивании к Q поверхности P (по перемычкам) мы получаем также ориентируемую поверхность, натянутую на цикл z .

132. Пользуясь результатами двух последних задач, докажите, что если L — переплетение в пространстве, на каждом контуре которого выбрано произвольное направление обхода, то существует такая ориентируемая поверхность, краем которой является переплетение L , что некоторая ее ориентация согласована с направлением обхода на каждой из линий переплетения L .

Указание. Надо следить за тем, чтобы на каждом шаге построения весь край получающейся поверхности был виден сверху.

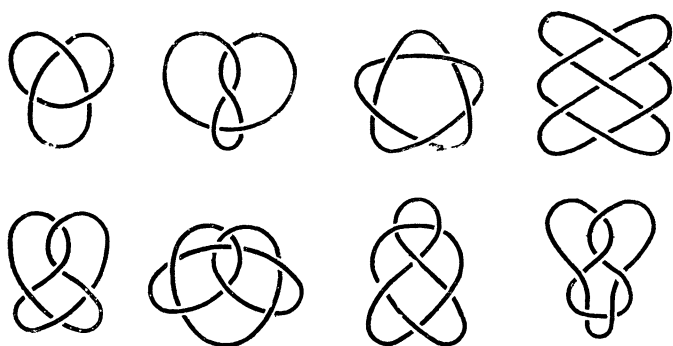


Рис. 115.



Рис. 116.

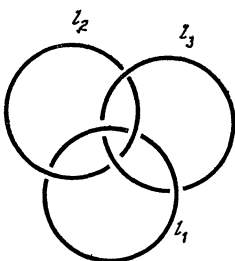


Рис. 117.

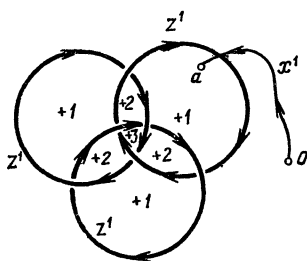


Рис. 118.

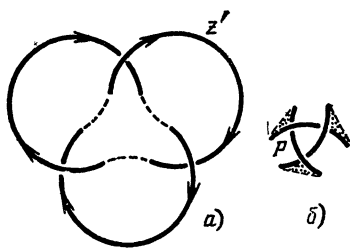


Рис. 119.

133. Докажите, что если для цикла z наибольшее значение числа $|k(M)|$, рассмотренного в задаче 130, равно n , то для поверхности, натянутой на переплетение L по методу задач 130—132, имеем $\chi(Q) \geq n - q$, где q — число двойных точек цикла z .

134. Докажите, что если переплетение L содержит l компонент, причем число двойных точек на его нормальной проекции z равно q , а наибольшее значение числа $|k(M)|$ для цикла z равно n , то на это переплетение можно натянуть пленку, гомеоморфную сфере с k ручками, в которой вырезано l круглых дыр, где $k \leq 1 + \frac{q - n - l}{2}$.

135. Докажите, что на морской (а также на «бабушкин») узел можно натянуть пленку, гомеоморфную сфере с тремя дырами, две из которых заклеены ручками.

19. Коэффициент зацепления

Для двух не пересекающихся друг с другом ориентированных контуров x , y в пространстве (x — первый контур, y — второй) можно следующим образом определить некоторое целое число, называемое *коэффициентом зацепления* этих контуров. Рассмотрим нормальную проекцию переплетения $x \cup y$ на некоторую («горизонтальную») плоскость и пусть a — двойная точка на этой проекции, в которой контур x идет ниже, чем y . Если, двигаясь вблизи a по направлению контура x , мы увидим (в проекции), что y пересекает его слева направо (рис. 120, а), то точке a припишем число $+1$, а если справа налево (рис. 120, б), то -1 . В остальных

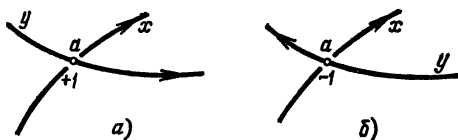


Рис. 120.

случаях (т. е. если пересекаются два участка одного и того же контура или если контур x проходит выше, чем y) двойной точке a припишем число 0. Сумма этих чисел по всем двойным точкам на проекции называется *коэффициентом зацепления* и обозначается через $\omega(x, y)$.

Пример 35. Для двух соседних звеньев обычной металлической цепи (рис. 121, а) коэффициент зацепления равен ± 1 (рис. 121, б). Для контуров, изображенных на рис. 122, имеем $\omega(x, y) = 3$.

Как мы увидим дальше, коэффициент зацепления $\omega(x, y)$ зависит лишь от расположения самих контуров x, y , а не от способа проектирования. Далее, если контуры x, y непрерывно деформируются в пространстве (например, движутся, как шарнирные ломаные), оставаясь

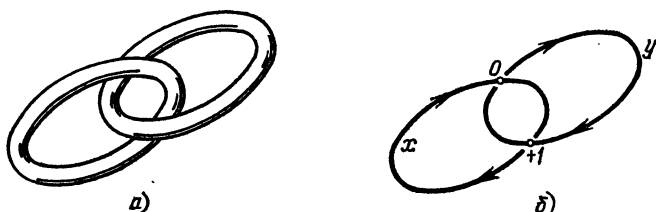


Рис. 121.

в каждый момент не пересекающимися, то их коэффициент зацепления $\omega(x, y)$ не меняется. Наконец, отметим, что коэффициент зацепления $\omega(x, y)$ является (с точностью до знака) *изотопическим инвариантом*. Иначе говоря, если f — гомеоморфное отображение трехмерного пространства на себя, то при этом отображения x, y переходят в такие контуры $f(x), f(y)$, что $\omega(f(x), f(y)) = \pm \omega(x, y)$.

Пример 36. В конце п. 2 упоминалось, что хотя дважды перекрученная лента гомеоморфна неперекрученной (см. рис. 8 на с. 13) эти фигуры не изотопны друг другу в пространстве.

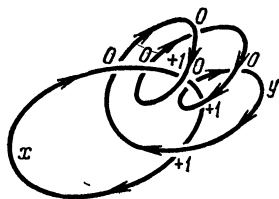


Рис. 122.

Теперь мы можем это доказать. В самом деле, коэффициент зацепления краев ленты равен в случае дважды перекрученной ленты ± 1 (в зависимости от того, в какую сторону перекручена лента), а в случае неперекрученной ленты — нулю (рис. 123). Поэтому при гомеоморфном отображении пространства на себя дважды перекрученная лента не может перейти в неперекрученную. Дважды перекрученная лента не может быть превращена в неперекрученную, как бы мы ни деформировали ее (оставляя гомеоморфной себе); ведь при такой деформации края ленты перемещаются, не пересекаясь друг с другом, и потому коэффициент зацепления измениться не может.

Пример 37. Постоянный ток I , протекающий по бесконечному прямолинейному проводу P , создает магнит-

ное поле, напряженность которого на расстоянии r от провода имеет величину $H = \frac{2I}{r}$. Как известно, потенциалом магнитного поля называется работа, которую надо затратить, чтобы из некоторой фиксированной точки x_0 (точки нулевого потенциала) переместить магнитный полюс,

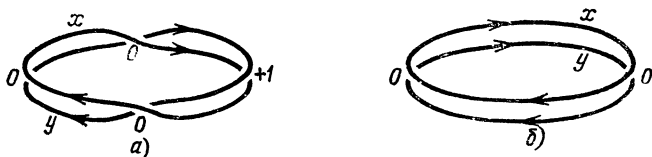


Рис. 123.

равный единице, в заданную точку поля. В рассматриваемом случае потенциал W магнитного поля многозначен. Действительно, если из точки x_0 перемещать магнитный полюс в точку a по двум путям, показанным на рис. 124, а, б,

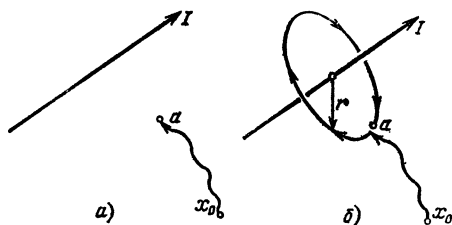


Рис. 124.

то первое перемещение требует дополнительной работы против силы $\frac{2I}{r}$ на пути $2\pi r$, т. е. дополнительной работы, численно равной $4\pi I$. Мы видим, что один обход вокруг провода (не обязательно по окружности — можно идти по любому пути) меняет магнитный потенциал $W(a)$ на величину $4\pi I$. Вообще, после t обходов вокруг провода, где t — целое число (положительное, отрицательное или нуль), потенциал изменится на $4\pi I t$. То же выражение для изменения потенциала справедливо в случае любого (не обязательно прямолинейного) провода (рис. 125). Число обходов («витков») пути z вокруг проводника P равно взятому со знаком минус коэффициенту за-

цепления проводника P с путем z , т. е. при обходе вокруг проводника P по замкнутому пути z магнитный потенциал меняется на величину $4\pi I m$, где $m = -w(P, z)$. Величину $I m$ иногда называют «числом ампервитков» (если ток I измеряется в амперах).

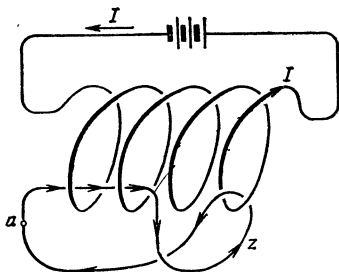


Рис. 125.

Задачи

136. Докажите, что при перестановке контуров их коэффициент зацепления не меняется; $w(x, y) = w(y, x)$.

137. Направленные контуры x' , y' симметричны контурам x , y относительно некоторой плоскости (учитывая направление обхода). Докажите, что $w(x', y') = -w(x, y)$.

138. Каков коэффициент зацепления края ленты Мёбиуса (см. рис. 50, g на с. 44) и его средней линии?

139. Пусть Q — поверхность, гомеоморфная ленте Мёбиуса (рис. 126), x — ее край, а y — «средняя линия» (т. е. образ средней линии ленты Мёбиуса M , изображенного на рис. 50, g , при гомеоморфизме $f: M \rightarrow Q$). Докажите, что число $w(x, y)$ нечетно.

Теперь мы дадим другое (эквивалентное) определение коэффициента зацепления. Будем представлять себе контуры x, y лежащими «почти целиком» в плоскости нормальной проекции, так что лишь вблизи двойных точек один из них проходит чуть ниже другого. Далее, рассмотрим ориентированную пленку Q , натянутую на контур y (так, как это было описано в задаче 132: контур y виден целиком, если смотреть на пленку Q сверху), причем будем считать, что эта пленка «провисает», располагаясь вблизи своего края почти вертикально (рис. 127). Тогда в тех двойных точках, в которых контур x идет выше y , он проходит и выше пленки Q , т. е. не пересекает ее. В тех же точках, где контур x проходит ниже y , он пересекает пленку Q ; при этом рассматриваемый участок контура x имеет с пленкой Q индекс пересечения $+1$, если, глядя по направлению линии x , мы видим, что линия y пересекает ее слева направо (рис. 128, a) и -1 , если пересечение происходит справа налево (рис. 128, b). Из этого сле-

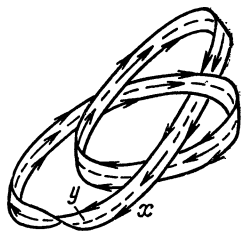


Рис. 126.

дует (если сравнить определение коэффициента зацепления и индекса пересечения), что справедливо равенство

$$w(x, y) = J(x, Q), \quad (20)$$

где Q — двумерная ориентируемая пленка, натянутая на контур y и согласованно с ним ориентированная.

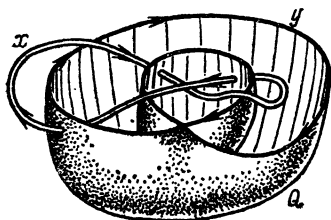


Рис. 127.

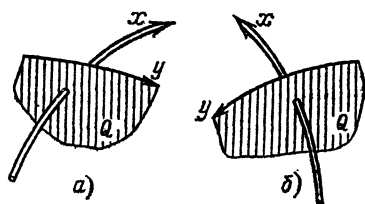


Рис. 128.

Равенство (20) останется справедливым, если взять любую пленку Q (не обязательно построенную так, как это было сделано в задаче 132). В самом деле, пусть имеются две различные ориентируемые пленки Q, Q' , натянутые на контур y и ориентированные согласованно с ним. Рассмотрим разность пленок Q и Q' , т. е. объединение пленки Q с имеющейся на ней ориентацией

и пленки Q' с противоположной ориентацией. Эта разность является двумерным целочисленным циклом (даже если Q и Q' пересекаются). Так как индекс пересечения целочисленного цикла x с этим двумерным циклом равен нулю, то $J(x, Q) = J(x, Q')$.

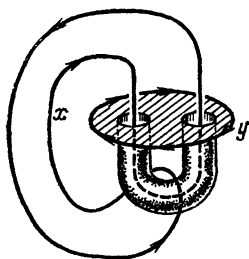


Рис. 129.

Из равенства (20) следует, что коэффициент зацепления (первоначально определенный с помощью нормальной проекции) не зависит от выбора плоскости

проекции. Из (20) вытекают также и другие упоминавшиеся выше свойства коэффициента зацепления.

Задачи

140. Пленка, натянутая на контур y (и находящаяся в общем положении с контуром x), пересекается с x в единственной точке. Докажите, что пленка, натянутая на контур x , пересекается с y .

141. Пусть x, y — ориентированные контуры в пространстве. Из формулы (20) вытекает, что если существует ориентированная пленка, натянутая на y и не пересекающаяся с x (рис. 129), то $w(x, y) = 0$. Докажите обратную теорему.

142. Докажите, что если $w(x, y)$ есть четное число, то существует пленка (возможно, не ориентируемая), натянутая на y и не имеющая общих точек с x .

143. Убедитесь, что три контура на рис. 117 имеют попарно коэффициенты зацепления, равные нулю. Постройте пленку, гомеоморфную ручке, которая натянута на один из этих контуров и не пересекается с двумя другими.

ГОМОТОПИИ И ГОМОЛОГИИ

20. Периоды многозначных функций

Пусть h — некоторый путь в фигуре X , идущий от начальной точки x_0 до конечной точки x_1 . Иначе говоря, $h: [0; 1] \rightarrow X$ есть непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям $h(0) = x_0$, $h(1) = x_1$. Будем этот путь непрерывно деформировать в фигуре X ,

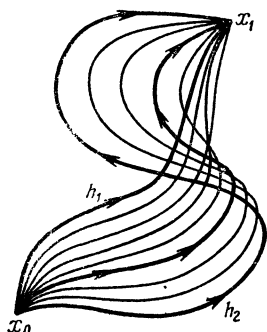


Рис. 130.

оставляя конечные точки x_0 и x_1 неподвижными. На рис. 130 положения деформируемого пути изображены тонкими линиями. Мы всегда будем рассматривать только такие деформации путей, при которых конечные точки не смещаются.

Два пути h_1, h_2 в фигуре X , имеющие одни и те же конечные точки, называются гомотопными в этой фигуре, если при помощи деформации (происходящей в фигуре X) h_1 может быть превращен в h_2 ; гомотопность путей обозначается записью $h_1 \sim h_2$.

Пример 38. В круге любые два пути, имеющие общие концы, гомотопны между собой. Наглядно это можно пояснить, вообразив, что путь представляет собой растянутую резиновую нить, извилистым образом расположенную внутри круга. Если мы отпустим резинку, закрепив конечные точки x_0, x_1 и позволив нити свободно перемещаться, то она начнет деформироваться и, сжимаясь, расположится по прямолинейному отрезку, соединяющему x_0 и x_1 . Таким образом, любой путь в круге гомотопен отрезку, соединяющему конечные точки x_0 и x_1 , и потому любые два пути, соединяющие x_0 и x_1 , гомотопны.

Пример 39. Обозначим через X кольцо, ограниченное двумя окружностями с общим центром o . Выберем не-

которую точку $x_0 \in X$ и для любой точки $x \in X$ обозначим через $\varphi(x)$ величину угла x_0ox (рис. 131). Функция $\varphi(x)$ *многозначна* (она определена с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, где k — целое число). Предположим, что в точке $x = x_0$ мы выбрали какое-либо одно значение φ_0 этой функции. При перемещении точки x в кольце X угол $\varphi(x)$ будет непрерывно меняться. Поэтому каждому пути h , ведущему в кольце X от точки x_0 к точке x_1 , соответствует вполне определенное значение φ_1 многозначной функции $\varphi(x)$, к которому мы приходим, взяв в точке x_0 значение φ_0 этой функции и непрерывно перемещаясь вдоль пути h от x_0 до x_1 . При этом *гомотопным* путям, ведущим в кольце X из точки x_0 в точку x_1 , соответствует *одно и то же* значение функции. В самом деле, значение функции, к которому мы приходим, проходя путь h , будет при непрерывной деформации пути h само непрерывно меняться. Следовательно, это значение должно оставаться постоянным: непрерывно меняясь, оно не может «перескочить» от одного из возможных значений функции $\varphi(x)$ в точке x_1 к другому (отличающемуся от него на $2k\pi$).

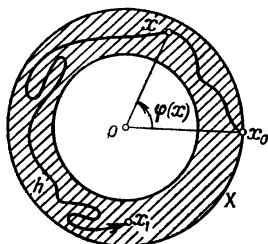


Рис. 131.

Пример 40. Если в примере 37 (с. 93) фиксировать точку нулевого потенциала x_0 , то во внешней области проводника P определится многозначная функция $W(x)$ (магнитный потенциал). Переместившись из точки x_0 в точку x_1 по некоторому пути h , мы придем ко вполне определенному значению магнитного потенциала в точке x_1 . *Гомотопные* между собой пути, ведущие из x_0 в x_1 , дадут в точке x_1 *одно и то же* значение магнитного потенциала, а негомотопные могут привести к различным значениям функции $W(x)$ в точке x_1 .

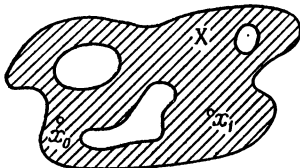


Рис. 132.

Задачи

144. На множестве X (рис. 132) постройте многозначную функцию, припимающую в точке x_0 бесконечное множество значений, среди которых имеются значения $0, 1, \sqrt{5}$.

145. На множестве X (рис. 132) постройте такую многозначную функцию, что два негомоторных пути, ведущих из x_0 к x_1 , приводят к одному и тому же значению в точке x_1 .

Пример 41. На фигуре X (рис. 133) рассмотрим функцию $f(x) = \varphi_1(x) + \sqrt{2}\varphi_2(x) - \sqrt{3}\varphi_3(x)$, где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ — величины углов a_1o_1x , a_2o_2x , a_3o_3x . Функция $f(x)$ многозначна. Если мы, начав движение из точки x_0 , пройдем путь h_1 (рис. 133), то (при возвращении

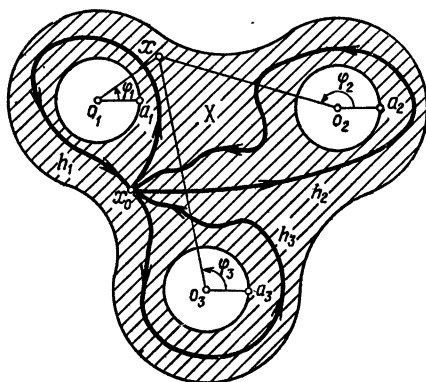


Рис. 133.

в точку x_0) к значению функции $\varphi_1(x_0)$ прибавится 2π , а значения функций $\varphi_2(x_0)$ и $\varphi_3(x_0)$ не изменятся; следовательно, к значению функции $f(x)$ в точке x_0 прибавится 2π . При обходе же пути h_2 к значению функции в точке x_0 прибавится $2\pi\sqrt{2}$, а при обходе пути h_3 прибавится $-2\pi\sqrt{3}$. Числа 2π , $2\pi\sqrt{2}$, $-2\pi\sqrt{3}$ можно назвать *периодами* функции $f(x)$ на множестве X соответствующими замкнутым путям h_1 , h_2 , h_3 .

Рассмотрим теперь путь, получающийся, если сначала пройти h_1 , а затем h_2 ; этот путь обозначается через h_1h_2 и называется *произведением* путей h_1 и h_2 . Ясно, что при прохождении пути h_1h_2 к значению функции $f(x)$ прибавится $2\pi + 2\pi\sqrt{2}$. Аналогично, при прохождении пути h_3h_1 к значению функции $f(x)$ прибавится $-2\pi\sqrt{3} + 2\pi$. Вообще, при перемножении двух путей (начинающихся и кончающихся в точке x_0) соответствующие этим путям периоды функции $f(x)$ складываются.

Так как значение функции $f(x)$, получаемое в результате прохождения некоторого пути, не изменяется при го-

мотопии этого пути, то мы можем не различать гомотопные пути. Иначе говоря, можно рассматривать не сами пути (начинающиеся и кончающиеся в точке x_0), а *классы путей*, объединяя в один класс все гомотопные между собой пути. Класс всех путей, гомотопных пути h , будем обозначать через $[h]$, а множество всех таких классов — через $\pi(X)$. Эти классы можно перемножать: берем путь h , принадлежащий первому классу, путь k , принадлежащий второму классу, и перемножаем их; тогда класс, который содержит путь hk , и называется *произведением* двух взятых классов: $[h] \cdot [k] = [hk]$.

Смысл введения классов путей понятен: каждому классу соответствует некоторый период многозначной функции $f(x)$, а при перемножении двух классов соответствующие периоды складываются.

21. Фундаментальная группа

Классы гомотопных путей и произведение этих классов можно рассмотреть для любой фигуры X . Будем рассматривать только такие пути в X , которые начинаются и кончаются в фиксированной точке $x_0 \in X$. Любые два из таких путей можно перемножить. Будем рассматривать *классы путей*, объединяя в один класс все гомотопные между собой пути. Если a — некоторый класс и h — какой-либо путь, принадлежащий этому классу, то будем говорить, что h — *представитель* класса a и писать $a = [h]$. Множество всех классов обозначим через $\pi(X)$. *Умножение* классов определим так же, как и в предыдущем пункте (см. рис. 133): если a и b — два класса путей (начинающихся и кончающихся в точке x_0), а h и k — какие-либо их представители, т. е. $a = [h]$, $b = [k]$, то класс, представителем которого является путь hk , мы объявляем *произведением* классов a и b , т. е. $ab = [hk]$. Заметим, что если вместо h и k взять другие представители h' и k' рассматриваемых классов a и b , то мы получим путь $h'k'$, гомотопный пути hk , т. е. определяющий тот же самый класс: $[h'k'] = [hk]$. Таким образом, произведение двух классов определяется именно этими классами, а от выбора представителей не зависит. Оказывается, что *относительно введенной операции умножения множество $\pi(X)$ является группой* *).

*) С понятием группы читатель может познакомиться по вышедшей в серии «Библиотечка «Квант» книге: Александров П. С. Введение в теорию групп. — М.: Наука, 1980.

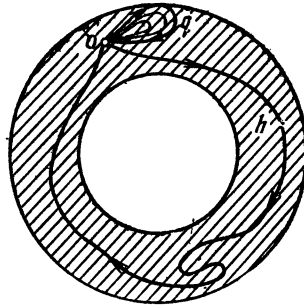


Рис. 134.

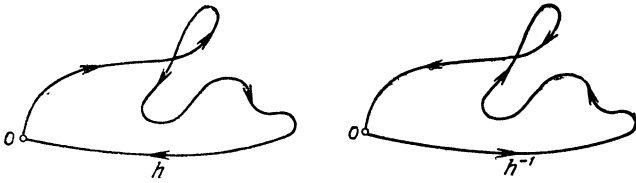


Рис. 135.

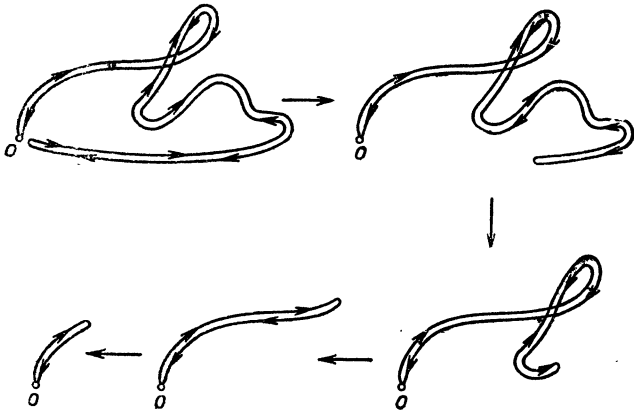


Рис. 136.

Укажем вкратце, как это устанавливается. Если h — какой-либо путь, принадлежащий классу a , а q — путь, который может быть стянут в точку, то $qh \sim h$ (рис. 134) и $hq \sim h$. Поэтому, обозначая символом 1 класс всех путей, стягиваемых в точку, мы получаем $1a = a$, $a1 = a$ для любого класса $a \in \pi(X)$, т. е. класс 1 является *единицей* относительно умножения, введенного в $\pi(X)$.

Далее, если a — какой-либо класс и h — его представитель, то обозначим через h^{-1} путь h , пробегаемый в обратном направлении (рис. 135). Тогда каждый из путей hh^{-1} и $h^{-1}h$ может быть стянут в точку (на рис. 136 показано стягивание в точку пути hh^{-1}). Поэтому, обозначив через a^{-1} класс, которому принадлежит путь h^{-1} , мы найдем, что $aa^{-1} = 1$, $a^{-1}a = 1$, т. е. в $\pi(X)$ для каждого элемента a существует *обратный*.

Несложно доказывается, что умножение в $\pi(X)$ *ассоциативно*. Таким образом, множество $\pi(X)$ есть *группа*. Она называется *фундаментальной группой* фигуры X (построенной в точке x_0).

Можно показать (см. задачу 148), что если любые две точки могут быть соединены путем в фигуре X , то фундаментальные группы фигуры X , построенные в *разных* точках x_0 и x'_0 , *изоморфны*. В этом случае (который мы только и будем рассматривать) можно просто говорить о фундаментальной группе фигуры X , не указывая, в какой точке она построена. *Фундаментальная группа является топологическим инвариантом*, т. е. если фигуры X и Y гомеоморфны, то их фундаментальные группы $\pi(X)$ и $\pi(Y)$ *изоморфны*. Заслуга открытия и изучения этого топологического инварианта принадлежит Пуанкаре.

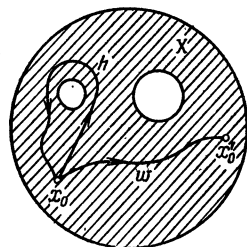


Рис. 137.

Задачи

146. Если группа $\pi(X)$ тривиальна (т. е. состоит только из единичного элемента), то фигура X называется *односвязной*. Иначе говоря, фигура X односвязна, если любой замкнутый путь в X может быть стянут в точку. Докажите, что любая *выпуклая* фигура (в частности, прямая, плоскость, отрезок, круг, шар, выпуклый многоугольник или многогранник) односвязны.

147. Докажите, что сфера односвязна.

Указание: любой путь (даже заполняющий всю сферу, подобно кривой Пеано) может быть деформирован в «гладкий путь», не покрывающий всю сферу.

148. Пусть w — путь, соединяющий две точки x_0, x_0' фигуры X . Каждому замкнутому пути h с начальной точкой x_0 поставим в соответствие путь $h^* = w^{-1}hw$ с начальной точкой x_0' (рис. 137). Докажите, что этим определяется изоморфизм фундаментальной группы фигуры X , построенной в точке x_0 , и группы, построенной в точке x_0' .

Пример 42. Покажем, что фундаментальная группа окружности является свободной циклической, т. е. изоморфна аддитивной группе целых чисел.

В самом деле, обозначим путь, равномерно обходящий окружность B в некотором «положительном» направлении, через a , а обратный путь — через a^{-1} . Тогда a^n будет обозначать путь, $|n|$ раз обходящий окружность: в «положительном» направлении, если $n > 0$, и в «отрицательном», если $n < 0$ (путь a^0 оставляет точку покоящейся в начальной точке x_0).

Любому пути можно поставить в соответствие некоторый график: положение точки, пробегающей путь, задается значением параметра t (например, времени) на единичном отрезке $0 \leq t \leq 1$. С другой стороны, этому же положению точки соответствует ее угловая координата φ на

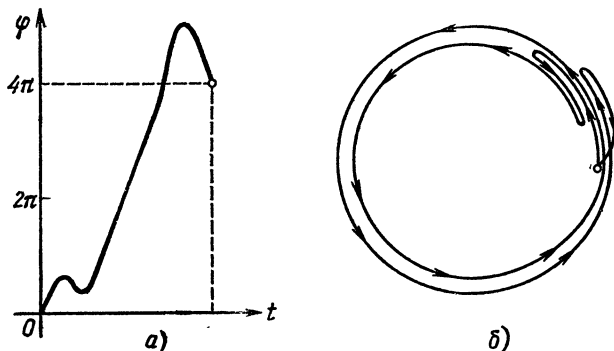


Рис. 138.

окружности B (отсчитываемая от начальной точки x_0). Откладывая по оси абсцисс t , а по оси ординат угол φ , получим график зависимости $\varphi(t)$ (причем $\varphi(0) = 0$).

Если точка, движущаяся равномерно, обходит окружность n раз, мы получаем путь a^n ; его график — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $(0; 0)$ и $(1; 2n\pi)$. Однако точка может двигаться по окружности B , многократно изменяя направление движения. На рис. 138, а

показан график пути, схематически изображенного на рис. 138, б. Но каким бы ни был замкнутый путь на окружности, его график всегда соединяет точку $(0; 0)$ с точкой $(1; 2\pi n)$, где n — некоторое целое число: ведь, пройдя этот путь, мы возвращаемся в точку x_0 , угловая координата которой является числом, кратным 2π . Число n называется *числом обходов* по окружности.

Любой путь f , совершающий n обходов, гомотопен пути a^n : начертив на одном рисунке графики путей f и a^n , заставим каждую точку первого графика перемещаться параллельно оси ординат до графика пути a^n . Если такое перемещение производить одновременно для всех точек (рис. 139), то мы деформируем график пути f в отрезок, являющийся графиком пути a^n . Но если график деформируется, то и сам путь деформируется, откуда и следует, что пути f и a^n гомотопны.

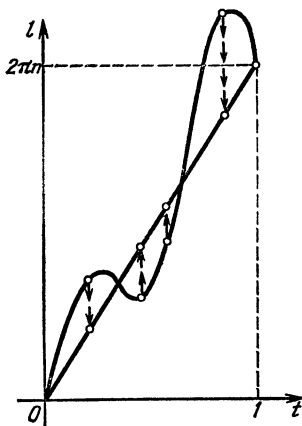


Рис. 139.

Значит, все пути, совершающие n обходов по окружности, гомотопны пути a^n , т. е. принадлежат одному классу путей. Пути же, для которых число обходов различно, не гомотопны между собой.

Итак, *элементы фундаментальной группы окружности B находятся во взаимно однозначном соответствии с целыми числами*. Так как при перемножении путей их числа обходов, очевидно, складываются, то из этого следует, что *группа $\pi(B)$ изоморфна аддитивной группе целых чисел*.

Задачи

149. Докажите, что фундаментальная группа кругового кольца является свободной циклической группой.

150. Фигура X представляет собой плоскость, из которой выколота (удалена) одна точка. Докажите, что группа $\pi(X)$ — свободная циклическая.

151. Докажите, что внутренняя область простой замкнутой линии l односвязна. Если же область G имеет границу, состоящую более чем из одного замкнутого контура (см. рис. 132 на с. 99), то G не односвязна.

22. Клеточные разбиения и полиэдры

Мы часто рассматривали поверхность Q , на которой начерчен граф G , разбивающий ее на части, гомеоморфные кругу. Это пример *клеточного разбиения*. Поверхность Q представляется в виде объединения попарно не пересекающихся *клеток*: *нульмерных*, *одномерных* и *двумерных*. Нульмерными клетками являются точки и — вершины графа G . Одномерные клетки — ребра графа G (без концов). Каждая одномерная клетка гомеоморфна открытому отрезку (без концов). Двумерные клетки — куски поверхности, на которые она распадается, если ее разрезать по ребрам графа G . Каждая двумерная клетка гомеоморфна открытому кругу.

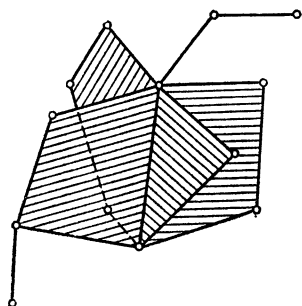


Рис. 140.

Можно также рассматривать клеточные разбиения, в которых к некоторому ребру (одномерной клетке) примыкают три, четыре или большее число двумерных клеток, а не обязательно

по две или одна, как было в случае поверхности с краем. К некоторым ребрам может не примыкать ни одной двумерной клетки (рис. 140). Если клеточное разбиение состоит только из нульмерных и одномерных клеток, то оно представляет собой граф. В топологии рассматривают клеточные разбиения любого числа измерений. Например, трехмерное клеточное разбиение состоит из клеток размерностей 0,1,2,3 (причем если удалить все клетки размерностей 0,1,2, то оно распадается на трехмерные клетки, каждая из которых гомеоморфна открытому шару).

Фигура, которую можно представить в виде клеточного разбиения, называется *полиэдром*. Фигуры, рассмотренные в примерах 16 (с. 33), 18 (с. 36), 31 (с. 84), полиэдрами не являются.

Пример 43. Сферу P_0 можно представить в виде клеточного разбиения, состоящего из одной нульмерной и одной двумерной клетки. Действительно, если в сфере «выколоть» точку, то оставшаяся часть τ будет гомеоморфна открытому кругу. Одномерных клеток это клеточное разбиение не содержит.

Пример 44. На рис. 141 изображено клеточное разбиение, состоящее из круга и его границы, разбитой на две полуокружности r_1, r_2 . Склеивание диаметрально противоположных точек окружности превращает круг в проективную плоскость, причем оба ребра, r_1, r_2 , склеиваются в одно ребро r . Мы получаем клеточное разбиение проективной плоскости, содержащее одну вершину, одно ребро r и одну двумерную клетку τ .

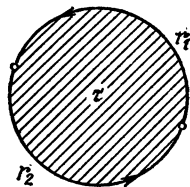


Рис. 141.

Пример 45. Начертим на торе параллель a и меридиан b , пересекающиеся в точке o (см. рис. 57, g на с. 48). Мы получаем клеточное разбиение тора, состоящее из одной вершины o , двух ребер a, b и одной двумерной клетки τ . Действительно, разрез по меридиану и параллели превращает тор в квадрат (см. задачу 65 на с. 48), т. е. в кусок, гомеоморфный кругу.

Задачи

152. Докажите, что ручку можно представить в виде клеточного разбиения, содержащего одну вершину, три ребра и одну двумерную клетку (см. рис. 58 на с. 48).

153. Докажите (см. рис. 59 на с. 48), что сферу с k ручками можно представить в виде клеточного разбиения, содержащего одну вершину, $2k$ ребер и одну двумерную клетку.

Нам понадобится говорить о направлении обхода на контуре грани (двумерной клетки). Смысл слов «направление обхода» в случае, когда грань гомеоморфна кругу, очевиден. В более сложных случаях направление обхода определяется следующим образом. При разрезании по всем ребрам грань (рис. 142, a) превращается в кусок, гомеоморфный кругу (рис. 142, b). Обойдем один раз границу этого куска в некотором направлении. При обратном «склеивании» рассмотренного куска в грань этот обход и даст *обход по контуру грани*. Можно поступить и иначе: совершить обход «очень близко» к границе клетки, нигде ее не пересекая (рис. 142, c).

Рассмотрим некоторую грань клеточного разбиения; все ребра, к которым она примыкает, как-либо ориентируем (т. е. выберем на них направления) и обозначим буквами a, b, c, \dots . Совершим теперь обход по контуру грани и одновременно с этим будем выписывать некоторый одночлен. Если мы, начиная обход, движемся сначала по ребру a , то мы напомним a или a^{-1} , смотря по тому, проходим

мы (совершая обход) ребро a по направлению имеющейся на этом ребре стрелки или против нее. Если следующее ребро, которое мы проходим, обозначено, скажем, буквой d , то мы справа припишем d или d^{-1} , смотря по тому, в каком направлении мы пробегаем ребро d . Если вслед за тем мы проходим ребро t , то припишем справа t или

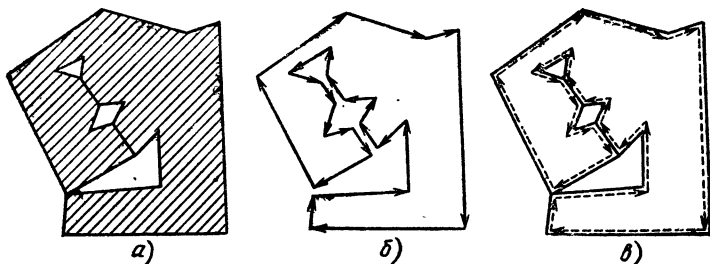


Рис. 142.

t^{-1} и т. д. Совершив весь обход, мы выпишем некоторый одночлен, который называется *гомотопической границей* рассматриваемой грани.

Гомотопическую границу можно записать по-разному, в зависимости от того, в каком направлении обходить контур грани и с какого ребра начать обход. Мы будем для каждой грани брать одну запись гомотопической границы (безразлично, какую именно).

Например, обходя против часовой стрелки контуры клеток $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ на рис. 143, мы получим их гомотопические границы:

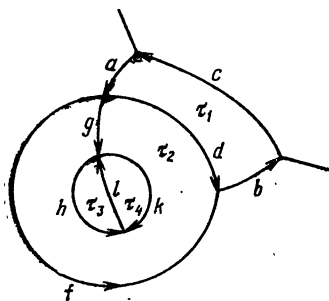


Рис. 143.

Например, обходя против часовой стрелки контуры клеток $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ на рис. 143, мы получим их гомотопические границы:

$adbc; kh^{-1}g^{-1}fd^{-1}g; hl; l^{-1}k^{-1}$.

Заметим, что ребро g встречается в гомотопической границе грани τ_2 дважды.

Мы дадим теперь (без доказательства) способ вычисления фундаментальной группы связного полиэдра X . Возьмем какое-нибудь его клеточное разбиение и обозначим через G граф, образованный вершинами и ребрами. В графе G выберем максимальное дерево и все ребра, входящие в это дерево, пометим цифрой 1. Остальные ребра

графа G (перемычки) как-либо ориентируем и пометим различными буквами a, b, c, \dots . Далее, для каждой грани рассматриваемого клеточного разбиения выпишем ее гомотопическую границу, не обращая внимания на ребра, помеченные цифрой 1. Наконец, построим группу, приняв буквы a, b, c, \dots , написанные на перемычках, за ее образующие элементы, а за определяющие соотношения между этими образующими — равенства, получающиеся, если все выписанные гомотопические границы приравнять единице. Эта группа изоморфна фундаментальной группе полиэдра X .

Пример 46. Возьмем клеточное разбиение проективной плоскости, рассмотренное в примере 44. Максимальное дерево состоит из одной вершины. Поэтому ребро r является единственным образующим элементом фундаментальной группы. Далее, гомотопическая граница двумерной клетки τ (см. рис. 141) равна $r \cdot r$. Итак, фундаментальная группа проективной плоскости определяется одной образующей r с соотношением $r^2 = 1$, т. е. является группой второго порядка.

Пример 47. Рассмотрим клеточное разбиение тора, описанное в примере 45. Гомотопическая граница двумерной клетки τ равна $aba^{-1}b^{-1}$ (надо обойти контур на рис. 57, a (см. с. 48) против часовой стрелки). Таким образом, фундаментальная группа тора имеет две образующие a, b , связанные единственным соотношением $aba^{-1}b^{-1} = 1$, т. е. $ab = ba$. Иначе говоря, она является свободной абелевой группой с двумя образующими.

Задачи

154. Используя клеточное разбиение, рассмотренное в задаче 152, докажите, что фундаментальная группа ручки представляет собой группу с тремя образующими a, b, c и единственным соотношением $ba = cab$. Эта группа не коммутативна: например, $ba \neq ab$.

155. Используя результат задачи 153, докажите, что группа $\pi(P_k)$ имеет $2k$ образующих $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ с единственным соотношением $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1} = 1$. При $k \geq 2$ эта группа неабелева (например, $a_1 b_1 \neq b_1 a_1$).

156. Докажите, что группа $\pi(N_q)$ имеет q образующих c_1, c_2, \dots, c_q , связанных единственным соотношением $c_1^2 c_2^2 \dots c_q^2 = 1$.

157. Докажите, что две замкнутые поверхности (без края) в том и только в том случае гомеоморфны, если их фундаментальные группы изоморфны.

158. Букетом окружностей B_k^1 называется объединение k простых замкнутых линий, которые все имеют общую точку o и больше

общих точек попарно не имеют (рис. 144). Докажите, что $\pi(B_k^1)$ есть свободная группа с k образующими.

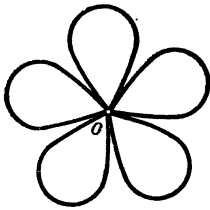


Рис. 144.

159. Область X на плоскости ограничена одним внешним контуром и k внутренними (см. рис. 132 на с. 99). Докажите, что $\pi(X)$ есть свободная группа с k образующими.

23. Накрытия

Пример 48. На окружности B с центром o фиксируем начальную точку x_0 и для любой точки $x \in B$ обозначим через $\varphi(x)$ величину центрального угла x_0ox . Функция $\varphi(x)$ определена с точностью до числа, кратного 2π . График E этой многозначной функции может быть построен на боковой поверхности бесконечного цилиндра; он имеет вид винтовой линии с шагом 2π (рис. 145).

Обозначим через p проектирование линии E на окружность B вдоль образующих цилиндра. Для произвольной

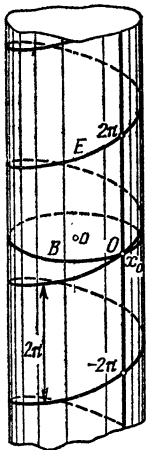


Рис. 145.

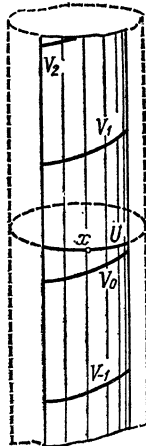


Рис. 146.

точки $x \in B$ возьмем небольшую ее окрестность U . Часть линии E , проектирующаяся на U , состоит из отдельных кусков $\dots, V_{-1}, V_0, V_1, \dots$ (рис. 146). Каждый из них с помощью проекции p гомеоморфно отображается на всю окрестность U .

Указанное свойство подводит нас к понятию *накрытия*. Пусть p — непрерывное отображение фигуры E на B . Допустим, что p обладает таким же свойством, как и в примере 48: для каждой точки $x \in B$ можно подобрать такую ее

окрестность U , что полный прообраз $p^{-1}(U)$ (т. е. множество всех точек фигуры E , переходящих при отображении p в точки окрестности U) распадается на части, каждая из которых при помощи p гомеоморфно отображается на U . При этих условиях E называется *накрытием* (или *накрывающей фигурой*) для B . Части полного прообраза $p^{-1}(U)$, гомеоморфно отображающиеся на U ,

называются *листами* накрытия. По числу листов различают двулистные, трехлистные и т. д. накрытия. Накрытие окружности винтовой линией бесконечнолистно.

Пример 49. Всякая односторонняя поверхность N имеет в качестве двусторонней накрывающей некоторую двустороннюю поверхность P . Расположим поверхность N в пространстве (с самопересечениями) без точек излома и отложим на каждой нормали (в ту и другую сторону от точки $x \in N$) отрезки xx и xx' постоянной длины ε , где ε — малое положительное число. Если бы поверхность N была двусторонней, то точки x и x' описали бы две различные поверхности, «параллельные» N . Но так как поверхность N односторонняя, то мы получим одну поверхность P : ведь при обходе по некоторому замкнутому пути на односторонней поверхности нормаль xx меняет направление, т. е. переходит в xx' , так что точки x и x' принадлежат одному куску поверхности P . Наглядно это построение можно описать так: вообразим поверхность N изготовленной из «толстого» материала и окрасим ее всю краской. Если теперь «сжечь» поверхность N , считая, что краска негорючая, то оставшийся тонкий слой краски и образует поверхность P , двулистно накрывающую N . При этом поверхность P двусторонняя: одна ее сторона обращена к сожженной поверхности N , а другая — наружу.

Например, если ленту Мёбиуса, изготовленную из «толстого» горючего материала, окрасить негорючей краской, а затем ленту Мёбиуса сжечь, то мы получим ленту, гомеоморфную боковой поверхности цилиндра (четырежды перекрученную, как легко убедиться на модели), которая двулистно накрывает ленту Мёбиуса.

Задачи

160. Докажите, что если E является k -листным накрытием полиэдра B , то $\chi(E) = k\chi(B)$.

161. Докажите, что двулистная накрывающая поверхности N_q является сферой с $q - 1$ ручками.

Пусть фигура E является накрывающей для B и $p: E \rightarrow B$ — соответствующая проекция. Пусть, далее, h — путь в фигуре B , исходящий из точки x_0 , а $x_0 \in E$ — некоторая точка, расположенная «над» x_0 , т. е. удовлетворяющая условию $p(x_0) = x_0$. Тогда в E существует (причем единственный) путь h , начинающийся в точке x_0 и переходящий в путь h при отображении p ; он называется *накрывающим путем*. В самом деле, пусть U — малень-

кая окрестность точки x_0 и \bar{U} — тот лист накрытия, который содержит точку \bar{x}_0 . Тогда, поскольку $p: \bar{U} \rightarrow U$ — гомеоморфизм, мы однозначно сможем «поднять» кусочек пути h , находящийся в окрестности U , на лист \bar{U} (рис. 147). Если x_1 — концевая точка того участка пути, который мы уже «подняли», то можно рассмотреть окрестность U_1 точки x_1 и соответствующий лист накрытия, что позволит

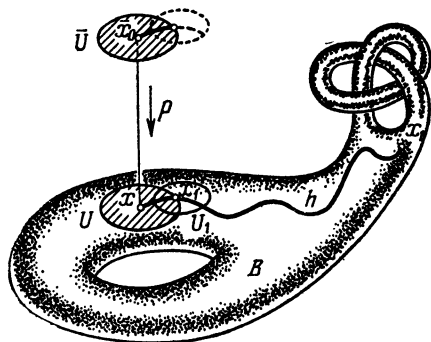


Рис. 147.

продолжить накрывающий путь \bar{h} еще на один кусочек, и т. д.

Рассмотрение накрывающих путей позволяет установить теорему о связи между накрытиями и фундаментальной группой. Мы ее приведем (без доказательства) в следующей упрощенной формулировке. *Если связный полиэдр E является k -листным накрывающим над B и порядок группы $\pi(E)$ (т. е. число ее элементов) равен n , то порядок группы $\pi(B)$ равен kn .*

Накрытие E над B называется *универсальным*, если оно односвязно. В силу сказанного выше число листов универсального накрытия над B равно порядку группы $\pi(B)$; любое другое накрытие имеет меньшее число листов.

Накрытие проективной плоскости сферой (см. задачу 161) универсально в силу односвязности сферы. Сфера является также универсальной накрывающей для самой себя. Оказывается, что *для всех замкнутых поверхностей, кроме сферы и проективной плоскости, универсальной накрывающей является плоскость*. Доказательством этого факта мы и закончим этот пункт. Прежде всего, так как односторонняя поверхность N имеет своей двулист.

ной накрывающей некоторую двустороннюю поверхность P , то универсальное накрытие над P будет универсальным накрытием и над N . Поэтому достаточно рассмотреть двусторонние поверхности, отличные от сферы.

Разделим плоскость двумя системами параллельных прямых на конгруэнтные квадраты; склеивая каждый квадрат в тор, мы получим отображение всей плоскости на тор, причем точкам, одинаково расположенным в различных квадратах (рис. 148), соответствует одна и та же точка тора

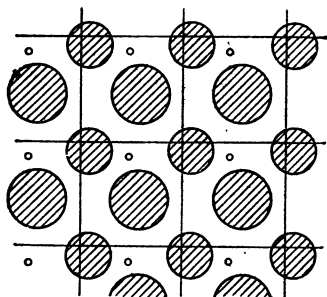


Рис. 148.

на тор, причем точкам, одинаково расположенным в различных квадратах (рис. 148), соответствует одна и та же точка тора

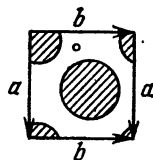


Рис. 149.

(рис. 149). Получающееся накрытие универсально, так как плоскость односвязна.

Каждый из квадратов является так называемой *фундаментальной областью*, т. е. связным куском накрывающей (плоскости), который взаимно однозначно отображается на тор. Рис. 150 показывает, что фундаментальная область определена не однозначно.

Опишем теперь разбиение на фундаментальные области, из которых склеиваются другие двусторонние поверхности, например, P_2 . Такое разбиение удобно произвести с помощью геометрии Лобачевского. В этой геометрии сумма углов многоугольника меньше, чем в евклидовой геометрии, причем сумма углов уменьшается при увеличении размеров многоугольника. Например, существует правильный восьмиугольник с углами $\frac{\pi}{4}$. Если такие восьмиугольники прикладывать друг

к другу целыми сторонами, то ими можно заполнить всю плоскость Лобачевского, причем в вершинах будут сходиться по восемь многоугольников. На рис. 151 изображено такое разбиение для модели плоскости Лобачевского в «круге Пуанкаре». Это и есть разбиение плоскости Лобачевского (она гомеоморфна открытому кругу, а потому и плоскости Евклида) на фундаментальные области:

склеивание сторон каждого восьмиугольника дает P_2 (см. рис. 59 на с. 48) и получается накрывающее отображе-

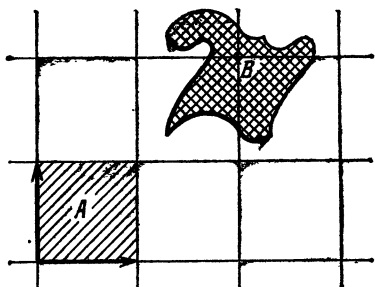


Рис. 150.

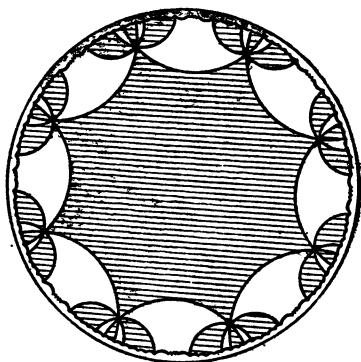


Рис. 151.

ние плоскости Лобачевского на P_2 . Аналогичное разбиение плоскости Лобачевского можно построить и для любой поверхности P_k ($k \geq 2$).

Задачи

162. На рис. 152 изображена «плоскость с бесконечным числом ручек». Покажите, что при $k \geq 2$ она может служить накрытием над поверхностью P_k .

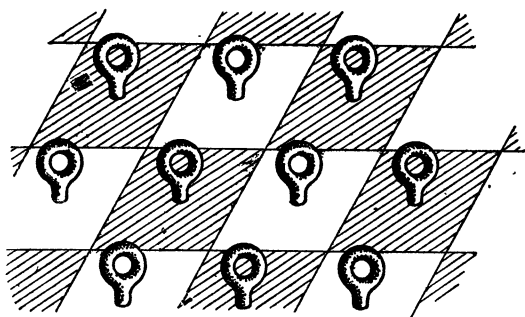


Рис. 152.

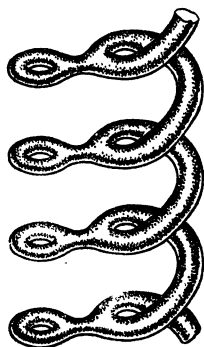


Рис. 153.

163. Покажите, что поверхность, изображенная на рис. 153, может служить накрывающей для любой поверхности P_k ($k \geq 2$).

164. Постройте универсальную накрывающую для фигуры, состоящей из сферы и касающейся ее окружности,

24. Степень отображения и основная теорема алгебры

На рис. 154 изображено непрерывное отображение f окружности P на окружность Q . На окрестность точки y отображаются два куска окружности P , причем отображаются положительно (т. е. с сохранением направления обхода). Говорят, что в точке y это отображение имеет степень 2. В точке x отображение также имеет степень 2: хотя

на окрестность точки x отображаются четыре куска окружности P , но три из них отображаются положительно, а один — отрицательно. Если мы обозначим через p число листов, положительно отображающихся на окрестность некоторой точки $z \in Q$, а через n — число листов, отображающихся отрицательно,

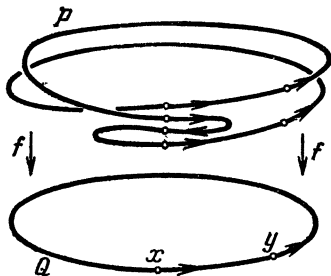


Рис. 154.

то степенью отображения f в точке z будет число $p - n$. Во всех точках окружности Q степень отображения f одинакова (и равна двум); например, в точке x имеем $p - n = 3 - 1 = 2$.

О степени отображения можно говорить и в случае отображения поверхностей. Пусть P и Q — две замкнутые ориентируемые поверхности, на каждой из которых задана ориентация. Пусть, далее, $f: P \rightarrow Q$ — некоторое непрерывное отображение; будем представлять себе, что поверхность P «наложена» на поверхность Q , располагаясь на ней несколькими «слоями» и образуя складки. Если на окрестность точки $z \in Q$ отображается несколько «листов» поверхности P , то некоторые из этих листов могут отображаться положительно (с сохранением ориентации, рис. 155, а), а некоторые — отрицательно (рис. 155, б). Если все «листья» поверхности P отображаются на окрестность точки z гомеоморфно, причем число листов, на которых отображение f положительно, равно p , а число листов, на которых оно отрицательно, равно n , то число $p - n$ называется *степенью* отображения f в точке z .

Нетрудно понять, что степень отображения f одинакова вблизи любой точки поверхности Q . Действительно, при перемещении точки z числа p и n меняются

лишь при прохождении через край складки, но разность $p - n$ остается неизменной (рис. 156). Заметим еще, что когда отображение f непрерывно деформируется, степень его остается неизменной; это можно пояснить, заметив, что образование (или расправление) складок не меняет степени отображения.

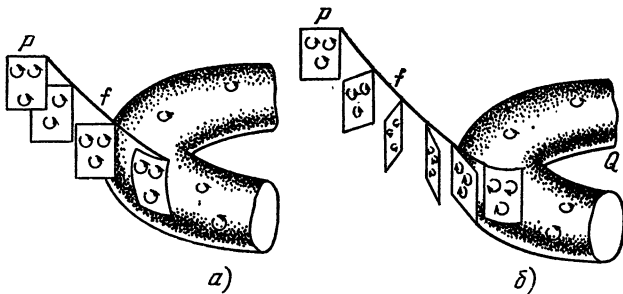


Рис. 155.

С помощью понятия степени отображения можно дать изящное доказательство основной теоремы алгебры: любой многочлен

$$f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m,$$

степени $m \geq 1$ с комплексными (в частности, действительными) коэффициентами a_1, \dots, a_m имеет хотя бы один корень.

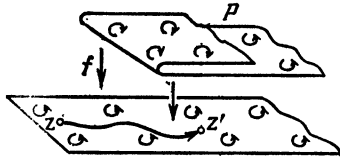


Рис. 156.

Возьмем сферу S , касающуюся плоскости в начале координат, и будем называть точку касания южным полюсом, а противоположную точку n — северным полюсом

сферы (рис. 157). Будем изображать комплексное число $z = x + iy$ точкой в плоскости, считая x и y его координатами (рис. 158). Отрезок nz пересекает сферу S в некоторой точке, которую мы будем считать изображением комплексного числа z на сфере S . Обратно, имея на сфере точку a , легко узнать, какое комплексное число она изображает: прямая na при пересечении с плоскостью и даст искомое комплексное число. Однако северный полюс n не изображает никакого комплексного числа. Мы условимся считать, что точка n изображает «бесконечное»

комплексное число, обозначаемое символом ∞ . Поводом для такого соглашения служит то, что при неограниченном удалении точки z на плоскости (в любую сторону) от начала координат изображающая ее точка на сфере приближается к n . Сфера S называется *комплексной сферой*, или *сферой Римана*. Отметим, что (в отличие от проективной плоскости; см. рис. 83 на с. 63) сфера S получилась

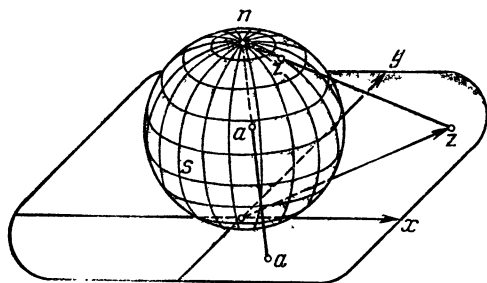


Рис. 157.

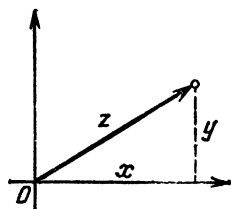


Рис. 158.

из плоскости добавлением одной бесконечно удаленной точки ∞ .

Мы будем изображать значения z на одной комплексной сфере S_1 , а значения многочлена $f(z)$ — на другой такой же сфере S_2 . Каждой «конечной» точке $z = x + iy$ сферы S_1 соответствует «конечная» точка $f(z)$ сферы S_2 . При этом если z будет приближаться к ∞ , то $f(z)$ также будет приближаться к точке ∞ сферы S_2 . Действительно, мы имеем

$$f(z) = z^m \left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z^{m-1}} + \frac{a_m}{z^m} \right);$$

при $z \rightarrow \infty$ (т. е. при неограниченном увеличении числа $|z|$) выражение в скобках приближается к единице, а множитель z^m неограниченно увеличивается. Таким образом, дополнив определение многочлена условием $f(\infty) = \infty$, мы получаем непрерывное отображение f всей сферы S_1 на сферу S_2 .

Для доказательства основной теоремы алгебры нужно установить, что найдется точка $z \in S_1$, для которой $f(z) = 0$, т. е. что точка 0 сферы S_2 является образом хотя бы одной точки $z \in S_1$. Если бы это было не так, т. е. точка 0 сферы S_2 не покрывалась образом $f(S_1)$ сферы S_1 , то степень отображения $f: S_1 \rightarrow S_2$ вблизи точки $0 \in S_2$ была бы равна нулю, а так как степень

одинакова вблизи любой точки, то просто степень отображения f была бы равна нулю. Поэтому для доказательства основной теоремы алгебры достаточно установить, что степень отображения f отлична от нуля. Мы покажем, что она равна m , т. е. совпадает со степенью многочлена $f(z)$ (это и послужило причиной введения термина «степень отображения»).

Будем изменять значения коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_m , приближая их к нулю; многочлен $f(z)$ будет меняться, отображение $f: S_1 \rightarrow S_2$ будет непрерывно деформироваться. В результате мы получим многочлен $f_1(z) = z^m$. Но так как при деформации отображения его

степень не меняется, то отображения f и f_1 имеют одну и ту же степень. Степень же отображения f_1 легко подсчитать.

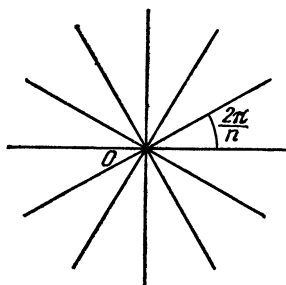


Рис. 159.

Разобьем плоскость лучами, исходящими из точки O , на m конгруэнтных углов (рис. 159). Так как при возведении комплексного числа z в степень m его аргумент увеличивается в m раз, то каждый из этих углов с помощью f_1 отображается («растягивается») на всю сферу S_2 . Таким образом, при ото-

бражении f_1 образ сферы S_1 покрывает m раз (причем положительно) сферу S_2 . Отсюда и вытекает, что степень отображения f_1 (а значит, и f) равна m . Теорема доказана.

В настоящее время известно много различных доказательств основной теоремы алгебры, но все они являются топологическими, т. е. в той или иной форме используют идею непрерывности. Без привлечения идей топологии доказывать основную теорему алгебры невозможно; можно сказать (хотя это звучит несколько странно), что основная теорема алгебры является *неалгебраической теоремой*.

Задачи

165. Докажите, что если $q \geq mk$, то существует отображение $f: P_q \rightarrow P_k$, имеющее степень m .

166. Докажите, что если P и Q — ориентируемые поверхности и отображение $f: P \rightarrow Q$ является k -листным накрытием, то степень отображения f равна $\pm k$.

167. Докажите, что если $f(z)$ — многочлен степени $m > 1$, то при некотором c (комплексном или действительном) уравнение $f(z) = c$ имеет не более $m - 1$ различных корней.

Указание. Если число корней равно m для любого s , то $f: S_1 \rightarrow S_2$ является накрытием и, следовательно, гомеоморфизмом, 168. Докажите, что при $k \geq 1$ всякое отображение $f: P_0 \rightarrow P_k$ стягиваемо (и потому имеет степень нуль).

Указание. Докажите, что для f существует накрывающее отображение $\tilde{f}: P_0 \rightarrow \tilde{E}$, где \tilde{E} — универсальное накрытие над P_k .

25. Группа узла

Пусть L_1 и L_2 — два узла в трехмерном пространстве. Обозначим через D_1 дополнительное пространство узла L_1 (т. е. множество всех точек пространства, не лежащих на линии L_1), а через D_2 — дополнительное пространство узла L_2 . Если узлы L_1, L_2 «одинаковы»,

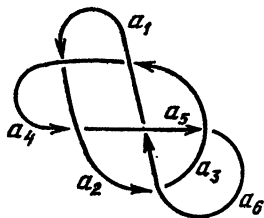


Рис. 160.

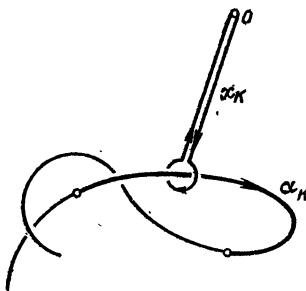


Рис. 161.

(изотопны), т. е. существует гомеоморфное отображение f пространства на себя, при котором L_1 переходит в L_2 , то $f(D_1) = D_2$, т. е. дополнительные пространства гомеоморфны. Следовательно, группы $\pi(D_1)$ и $\pi(D_2)$ изоморфны, т. е. *фундаментальная группа дополнительного пространства является инвариантом узла*. Этот инвариант называется группой узла. Мы будем группу узла обозначать буквой G , т. е. $G(L_1) = \pi(D_1)$. Из сказанного ясно, что если группы $G(L)$ и $G(L')$ не изоморфны, то узлы L и L' не изотопны.

Укажем теперь (без доказательства) способ вычисления группы узла. Пусть нормальная проекция узла L разбита на n дуг a_1, a_2, \dots, a_n , отделенных перерывами. Кроме того, выберем на L направление обхода и отметим его стрелками на дугах a_1, a_2, \dots, a_n (рис. 160). Теперь для описания группы $G(L)$ возьмем в пространстве точку o , расположенную в π ш е линии L , и из нее проведем замкнутый путь x_k , охватывающий дугу a_k , расположенную

над a_k , и обходящий ее в соответствии с правилом буравчика (рис. 161). Гомотопические классы путей x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) являются образующими группы узла.

Рассмотрим теперь какую-нибудь двойную точку проекции и обойдем вокруг нее по небольшой окружности l (по часовой стрелке), выписывая одновременно некоторый одночлен. Именно, если встретившаяся (при движении по l) дуга a_i входит внутрь окружности, то возьмем соответствующий символ x в степени $+1$, а если выходит из окружности, то в степени -1 . Обойдя вокруг двойной точки, мы выпишем, слева направо, произведение четырех множителей, которое приравняем единице; например, для двойной точки на рис. 162 получим соотношение

$$x_i x_k^{-1} x_j^{-1} x_k = 1.$$

Нетрудно наглядно представить себе, что путь $x_i x_k^{-1} x_j^{-1} x_k$ действительно гомотопен нулю в дополнительном пространстве: на рис. 163 изображена пленка, гомеоморфная

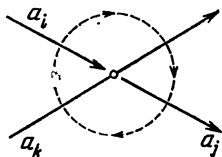


Рис. 162.

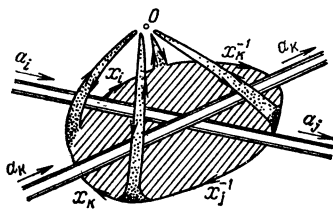


Рис. 163.

кругу, натянутая на этот путь. Оказывается, что, написав такие соотношения для всех двойных точек, мы и получаем полную систему соотношений между образующими x_1, x_2, \dots, x_n . Это описание группы узла применимо и к произвольным переплетениям.

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных узлов и переплетений, рассмотрим один алгебраический пример.

Пример 50. Докажем, что группа G , заданная тремя образующими x_1, x_2, x_3 и соотношениями

$$x_2 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} = 1, \quad x_3 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} = 1, \quad x_1 x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} = 1,$$

неабелева. Для доказательства обозначим через G' группу самосовмещений равностороннего треугольника; она со-

стоит из шести элементов: поворотов вокруг точки o на углы $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ и трех осевых симметрий x'_1, x'_2, x'_3 , оси которых показаны на рис. 164. Без труда проверяется, что для элементов x'_1, x'_2, x'_3 указанные соотношения справедливы. При этом группа G' неабелева. Следовательно, группа G , заданная образующими x_1, x_2, x_3 и выписанными соотношениями, также неабелева (действительно, из

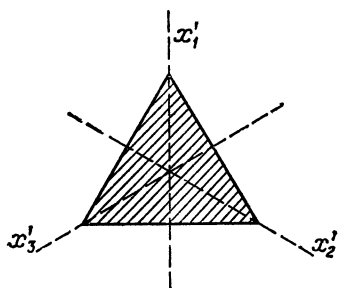


Рис. 164.

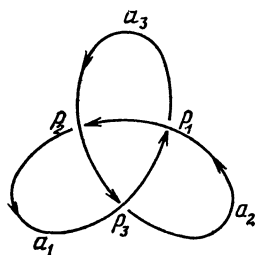


Рис. 165.

этих соотношений не может вытекать, что группа G абелева, так как тогда и группа G' должна была бы быть абелевой, что неверно).

Пример 51. На рис. 165 изображена проекция простого узла L . Соотношения между образующими x_1, x_2, x_3 (взятые в двойных точках p_1, p_2, p_3) совпадают с соотношениями, которые указаны в примере 50. Таким образом, группа $G(L)$ этого узла неабелева. Следовательно, узел L не изотопен окружности (у которой фундаментальная группа дополнительного пространства является свободной циклической и потому абелева). Таким образом, узел L не может быть развязан без разрезания нити.

Пример 52. На рис. 166 изображено переплетение L , образованное средними линиями торов, которые составляют множество A_1 на рис. 104, а (с. 84). Группа $G(L)$ этого переплетения имеет $2m$ образующих $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$, которые получаются, если рассматривать пути, охватывающие дуги $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$, изображенные на рис. 166. Между этими образующими имеется $2m$ соотношений (выписанных для двойных точек p_i, q_i), которые имеют следующий вид:

$$x_i x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} y_{i+1} = 1, \quad x_i y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} y_{i+1} = 1; \quad i = 1, \dots, m$$

(где следует считать $x_{m+1} = x_1$, $y_{m+1} = y_1$). Окружность l , изображенная на рис. 166, представляет собой путь в дополнительном пространстве переплетения L , причем класс этого пути равен $x_1^{-1}y_1$ (рис. 167). Докажем, что путь

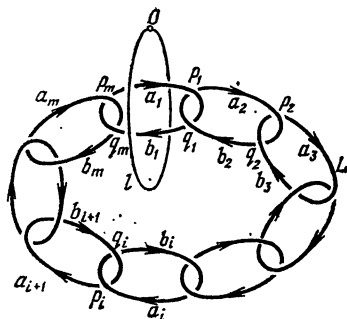


Рис. 166.

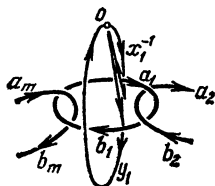


Рис. 167.

l негомотопен нулю в дополнительном пространстве, т. е. при стягивании окружности l в точку она непременно пересечет переплетение L .

Для доказательства обозначим через G' группу самосовмещений правильного m -угольника. Она состоит из по-

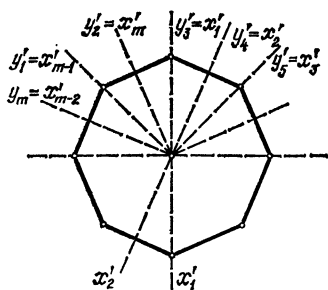


Рис. 168.

воротам вокруг точки o на углы $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$ и осевых симметрий x'_1, \dots, x'_m , оси которых показаны на рис. 168. Положим, кроме того,

$$y'_1 = x'_{m-1}, \quad y'_2 = x'_m, \quad y'_3 = x'_1, \quad \dots, \quad y'_m = x'_{m-2}.$$

Без труда проверяется, что эти элементы группы G' удовлетворяют всем выписанным соотношениям (посколь-

ку $(x'_i)^{-1} = x'_{i+1}$, а $x'_i x'_{i+1}$ есть поворот на угол $\frac{2\pi}{m}$). Кроме того, элемент $(x'_1)^{-1} y'_1$ (представляющий собой поворот на угол $\frac{4\pi}{m}$) отличен от единицы группы G' (т. е. от тождественного отображения). Следовательно, и в группе G элемент $(x_i)^{-1} y_1$ отличен от единицы. Иначе говоря,

окружность l определяет в дополнительном пространстве путь, негомотопный нулю.

Аналогично можно доказать, что путь l негомотопен нулю и в дополнении переплетения, представляющего собой объединение средних линий торов, составляющих множество A_2 (рис. 104, б), и т. д. Это и дает обоснование свойств антуановского множества, рассмотренного в п. 17.

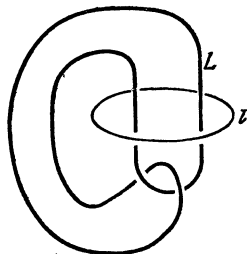


Рис. 169.

Задачи

169. Докажите, что переплетение, изображенное на рис. 117 (с. 91), невозможно «разнять», не разрывая ни одной из линий.

У к а з а н и е. Докажите, что окружность l_1 определяет ненулевой элемент группы $G(L)$, где L — переплетение, образованное двумя другими окружностями. Для этого проверьте, что $G(L)$ есть свободная группа с двумя образующими.

170. Докажите, что окружность l , изображенную на рис. 169, невозможно «снять» с линии L и, следовательно, в дополнительном пространстве линии L не существует пленки, гомеоморфной кругу, которая «натянута» на l . Докажите также, что существует пленка, гомеоморфная ручке, которая «натянута» на l и расположена в дополнительном пространстве линии L .

26. Циклы и гомологии

На каждом из рисунков 170, 171 одномерный цикл z (он изображен в виде плавной линии, а не ломаной) ограничивает на поверхности некоторую область x . На рисунках эта область («пленка», натянутая на цикл z) ориентирована согласованно с этим циклом. Будем считать каждый *ограничивающий цикл* (т. е. цикл, на который можно натянуть пленку) несущественным, или, как говорят, *гомологичным нулю*.

На рис. 172, а изображены два цикла z_1 и z_2 ; объединение этих циклов обозначим через $z_1 + z_2$. На рис. 172, б показана разность $z_1 - z_2$ этих циклов (т. е. сумма цикла z_1 и цикла $-z_2$, получающегося из z_2 изменением ориентации). На рисунке видно, что цикл $z_1 - z_2$ гомологичен нулю (он является границей пленки x). В этом случае говорят, что циклы z_1 и z_2 *гомологичны*.

В работах Пуанкаре были введены и изучены *группы гомологий*, являющиеся важными топологическими инва-

риантами. Идея их построения состоит в том, чтобы изучить, как велик в данной фигуре X запас циклов, которые попарно не гомологичны.

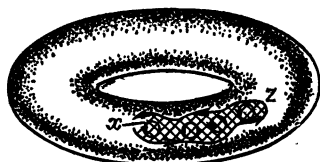


Рис. 170.

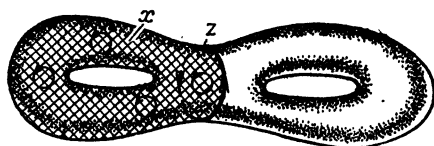


Рис. 171.

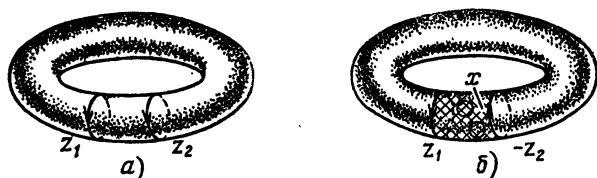


Рис. 172.

Задачи

171. Докажите, что на сфере каждый одномерный цикл гомологичен нулю.

172. Докажите, что в дополнительном пространстве множества A_1 , рассмотренного в примере 31 (а значит, и в дополнительном пространстве антуановского множества $A^* \subset A_1$) цикл l_1 (см. рис. 105, а на с. 85) гомологичен нулю. Отсюда можно заключить, что *стягиваемость* цикла является более тонким свойством, чем его гомологичность нулю.

173. Докажите, что каждый из циклов, изображенных замкнутыми контурами на рис. 173, 174, гомологичен нулю вне остальных контуров.

174. Докажите, что если коэффициент зацепления $w(z_1, z_2)$ отличен от нуля, то ни один из циклов z_1, z_2 не гомологичен нулю в дополнительном пространстве другого цикла.

Для построения групп гомологий следует обобщить понимание циклов и натягиваемых на них пленок. На рис. 175 каждый из циклов z_1, z_2 гомологичен нулю: цикл

z_1 является границей круга $\tau_1 + \tau_2$, а цикл z_2 — границей круга $\tau_1 + \tau_3$. Сумма же $z_1 + z_2$ ограничивает «область» $(\tau_1 + \tau_2) + (\tau_1 + \tau_3) = 2\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, состоящую из «дважды взятой» клетки τ_1 и «один раз взятых» клеток τ_2 и τ_3 . Таким образом, чтобы убедиться, что цикл $z_1 + z_2$

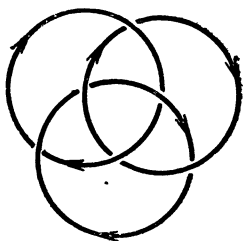


Рис. 173.

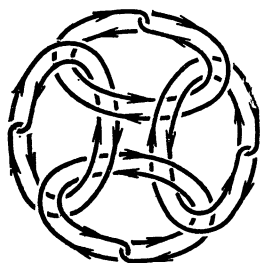


Рис. 174.

гомологичен нулю, приходится брать клетки с определенными коэффициентами. Точно так же циклы могут состоять из клеток, взятых с некоторыми коэффициентами. Например, на рис. 176 сумма $r_1 + r_2 + r_3 + 3r_4$ является циклом, поскольку (учитывая «трижды взятое» ребро r_4)

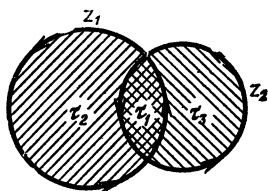


Рис. 175.

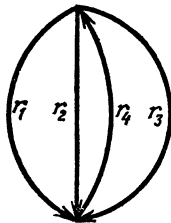


Рис. 176.

в каждой вершине число входящих и исходящих ребер одинаково.

Отметим следующую теорему, вытекающую из закона двойственности Александра — Понтрягина (полную формулировку этого закона мы здесь не приводим). Пусть P — полиэдр, расположенный в трехмерном евклидовом пространстве, а Q — его дополнительное пространство; цикл z_1 , расположенный в одной из фигур P, Q , в том и только в том случае не гомологичен нулю в этой фигуре, если в другой из этих фигур найдется цикл z_2 , зацепленный с z_1 (т. е. $\mathfrak{w}(z_1, z_2) \neq 0$).

Пример 53. На рис. 177 изображена линия P и цикл z' в дополнительном пространстве Q , причем цикл z' не зацеплен с одномерными циклами полиэдра P . Следовательно, z' гомологичен нулю в Q . На рисунке показана двумерная пленка $x' \subset Q$, границей которой является цикл z' .

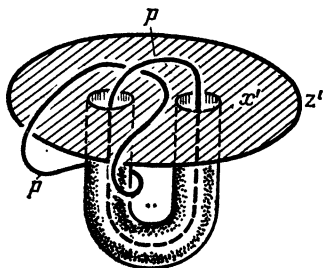


Рис. 177.

Задачи

175. Для циклов m_1, m_2, m_3, m_4 , расположенных на поверхности кренделя (рис. 178), укажите в дополнительном пространстве такие циклы z_1, z_2, z_3, z_4 , что $\omega(m_i, z_j)$ равно единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$).

176. Докажите, что для любого узла $l \subset R^3$ существует такой полиэдр $K \subset R^3$, гомеоморфный боковой поверхности цилиндра, что один край его совпадает с l , а другой край l' имеет с l нулевой коэффициент зацепления.

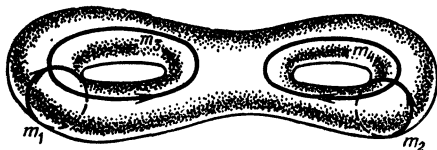


Рис. 178.

177. Постройте в фигуре P (см. рис. 132 на с. 99) циклы m_1, m_2, m_3 , а в ее дополнении (в пространстве) циклы z_1, z_2, z_3 так, что $\omega(m_i, z_j)$ равно единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$.

Будем рассматривать не сами одномерные циклы, а классы гомологий, объединяя в один класс все гомологичные между собой одномерные циклы рассматриваемой фигуры X . Операция сложения превращает множество всех классов в группу; это и есть одномерная группа гомологий $H_1(X)$.

Опишем способ в ч и с л е н и я одномерной группы гомологий. Прежде всего отметим, что если два цикла z_1, z_2 г о м о т о п н ы (т. е. могут быть получены один из другого с помощью деформации), то они гомологичны. Наглядно это можно объяснить тем, что «след», который «замечает» цикл z_1 в процессе его деформации в z_2 , и есть та пленка, которая соединяет циклы z_1 и z_2 (рис. 179).

Обратное может не иметь места; гомологичные циклы на рис. 180 не гомотопны! перемещению цикла z_1 на поверхности Q в цикл z_2 мешают «дырки», имеющиеся на поверхности между этими циклами. Таким образом, для гомоло-

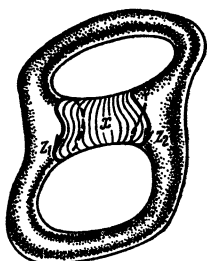


Рис. 179.

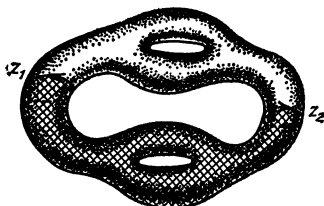


Рис. 180.

гичности двух циклов достаточно (но не необходимо), чтобы они были гомотопными.

Легко представить себе наглядно, что если задано клеточное разбиение полиэдра X , то любой одномерный цикл в этом полиэдре может быть при помощи деформации «сдвинут» в *одномерный остов*, т. е. в граф, состоящий из всех вершин и ребер (рис. 181). «Складки», которые могут возникнуть при деформации, можно распрямить. Следовательно, любой одномерный цикл гомотопен (а значит, и гомологичен) циклу, составленному из ребер, взятых с некоторыми коэффициентами. Таким образом, для вычисления группы гомологий $H_1(X)$ достаточно рассматривать одномерные циклы, составленные из ребер (с некоторыми целочисленными коэффициентами). Пленки же, натягиваемые на циклы, можно считать составленными из двумерных клеток, взятых с некоторыми коэффициентами.



Рис. 181.

Значит, нужно, во-первых, найти все одномерные циклы (составленные из ребер) и, во-вторых, научиться вычислять границы двумерных клеток, чтобы выяснить, какие одномерные циклы друг другу гомологичны. Первое не представляет труда: надо лишь проследить,

чтобы в каждой вершине число входящих ребер было равно числу исходящих (учитывая коэффициенты). Второе фактически мы уже умеем делать: надо совершить обход по контуру клетки (в соответствии с ее ориентацией), но выписывать не произведение ребер (что мы делали при составлении *гомотопической границы* клетки), а их сумму с учетом знаков. Иначе говоря, в границу двумерной клетки τ (ее обозначают через $\partial\tau$) ребро g войдет с коэффициентом, равным сумме показателей степени, с которыми g входит в гомотопическую границу. Например, для клеток на рис. 143 (с. 108), ориентированных против часовой стрелки, мы имеем

$$\begin{aligned}\partial\tau_1 &= a + b + c + d; & \partial\tau_2 &= -d + f - h + k; \\ \partial\tau_3 &= h + l; & \partial\tau_4 &= -k - l.\end{aligned}$$

Пример 54. Клеточное разбиение двумерной сферы P_0 , рассмотренное в примере 43, содержит только две клетки: нульмерную и двумерную. Одномерных клеток это разбиение не содержит совсем, поэтому группа $H_1(P_0)$ тривиальна (ненулевых одномерных циклов в этом клеточном разбиении нет).

Пример 55: Рассмотренное в примере 44 клеточное разбиение проективной плоскости N_1 состоит из одной нульмерной клетки, одной одномерной клетки g и одной двумерной клетки τ . Любой одномерный цикл имеет вид kg (поскольку, кроме g , других ребер нет), причем цикл $2g$ гомологичен нулю (так как $2g = \partial\tau$; см. рис. 141 на с. 107). Отсюда следует, что одномерная группа гомологий $H_1(N_1)$ проективной плоскости является группой порядка 2.

Заметим, что при вычислении групп гомологий в примерах 54, 55 мы использовали одно клеточное разбиение рассматриваемого полиэдра, но говорили не о «группе гомологий этого разбиения», а о группе гомологий самого полиэдра. В действительности, это оправдано, поскольку группы гомологий полиэдров не зависят от выбора клеточных разбиений, а всецело определяются самими полиэдрами.

Задачи

178. На рис. 182 показано клеточное разбиение ленты Мёбиуса (обе полуокружности на внутреннем контуре склеиваются в одно ребро a). Проверьте, что $\partial\tau = c - 2a$, и выведите отсюда, что одномерная группа гомологий ленты Мёбиуса является свободной циклической.

179. Докажите, что для клеточного разбиения тора T , рассмотренного в примере 45 (с. 107), справедливо соотношение $\partial\tau = 0$. Выведите отсюда, что $H_1(T)$ есть свободная абелева группа с двумя образующими a, b .

180. Докажите, что цикл z , изображенный на рис. 183, гомологичен $\pm 3a \pm 2b$ (где знаки зависят от направлений, выбранных на параллели a и меридиане b тора T).

181. Докажите, что одномерная группа гомологий кренделя P_2 является свободной абелевой группой с четырьмя образующими m_1, m_2, m_3, m_4 (см. рис. 178).

182. Докажите, что одномерная группа гомологий поверхности P_k является свободной абелевой группой с $2k$ образующими.

183. Вычислите группу $H_1(N_q)$.
(О т в е т: абелева группа с q образующими c_1, c_2, \dots, c_q , связанные

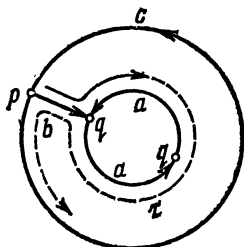


Рис. 182.

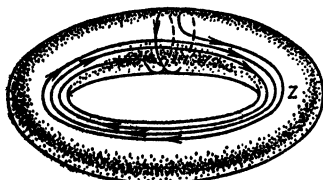


Рис. 183.

ми единственным соотношением $2c_1 + 2c_2 + \dots + 2c_q = 0$. Эту группу можно описать и иначе: прямая сумма группы второго порядка и свободной абелевой группы с $q - 1$ образующими.)

184. Докажите, что замкнутая поверхность Q в том и только в том случае неориентируема, если в группе $H_1(Q)$ имеется элемент порядка 2. Докажите также, что две замкнутые поверхности в том и только в том случае гомоморфны, если их одномерные группы гомологий изоморфны.

185. Докажите, что не существует клеточного разбиения тора, состоящего менее чем из четырех клеток.

Рассмотрим теперь нульмерные гомологии. Нульмерный цикл мы получаем, взяв вершины клеточного разбиения с некоторыми целочисленными коэффициентами.

Далее, граница ребра равна разности его концов: на рис. 184 имеем $\partial r_1 = b - a$, $\partial r_2 = 0$. Два нульмерных цикла гомологичны, если их разность является границей некоторой суммы одномерных клеток (с какими-то коэффициентами).

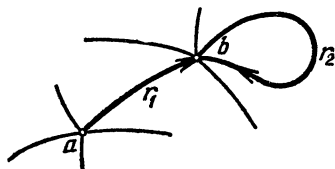


Рис. 184.

Наконец, будем рассматривать нульмерные классы гомологий, объединяя в один класс все гомологичные между собой нульмерные циклы рассматриваемого полиэдра X . Операция сложения превращает множество всех классов в группу; это и есть нульмерная группа гомологий $H_0(X)$.

Задачи

186. Докажите, что если r_1, r_2, \dots, r_k — простая цепочка направленных ребер, идущая от вершины a к вершине b , то $\partial(r_1 + r_2 + \dots + r_k) = b - a$.

187. Докажите, что если X — связный полиэдр, то любой нульмерный цикл в X гомологичен одной точке, взятой с некоторым коэффициентом, т. е. группа $H_0(X)$ является свободной циклической.

188. Докажите, что если полиэдр X состоит из k компонент, то $H_0(X)$ есть свободная абелева группа с k образующими.

Аналогично определяется двумерная группа гомологий $H_2(X)$: нужно в X рассматривать двумерные циклы и натянутые на них трехмерные «пленки».

Пример 56. Пусть X состоит из всех точек трехмерного пространства, лежащих на торе и внутри него («полный тор»). Полиэдр X можно представить в виде клеточного разбиения, в котором, кроме клеток a, b, v , расположенных на торе, имеется еще одна двумерная клетка v' («поперечное сечение» тора), границей которой служит меридиан b , и одна трехмерная клетка v — внутренность тора, рассеченная по клетке v' . Границы клеток имеют следующие значения:

$$\partial a = 0, \quad \partial b = 0, \quad \partial v = 0, \quad \partial v' = b, \quad \partial v = v$$

(заметим, что трехмерная клетка v с двух сторон примыкает к двумерной клетке v' , причем с одной стороны ориентация клетки v' наблюдается, как ориентация по часовой стрелке, а с другой стороны — против стрелки; поэтому в ∂v клетка v' не входит).

Одномерные циклы этого клеточного разбиения имеют вид $ka + lb$ (где k, l — целые), причем цикл b гомологичен нулю (на него натянута пленка v'). Следовательно, любой одномерный цикл гомологичен ka , и потому группа $H_1(X)$ — свободная циклическая. Далее, так как $\partial(mv + nv') = nb$, то $mv + nv'$ только в том случае является двумерным циклом (т. е. имеет границу, равную нулю), если $n = 0$. Итак, двумерные циклы имеют вид mv . Но любой такой цикл гомологичен нулю (поскольку $\partial v = v$, т. е. v есть «трехмерная пленка», натянутая на двумерный цикл v). Следовательно, группа $H_2(X)$ тривиальна.

В ряде случаев удобно вместо вычисления всей группы гомологий $H_r(X)$ ограничиться лишь нахождением ранга этой группы; он называется r -мерным числом Бетти полиэдра X и обозначается через $\beta_r(X)$. Определение

чисел Бетти можно сформулировать и иначе. Говорят, что r -мерные циклы z_1, \dots, z_n в X гомологически независимы, если, каковы бы ни были целые числа k_1, \dots, k_r , хотя бы одно из которых отлично от нуля, цикл $k_1 z_1 + \dots + k_r z_r$ не гомологичен нулю в X . Теперь r -мерное число Бетти $p_r(X)$ определяется как наибольшее число гомологически независимых r -мерных циклов в X .

В качестве примера применения чисел Бетти приведем (без доказательства) следующую теорему о вычислении эйлеровой характеристики. Пусть X — некоторый полиэдр; рассмотрим какое-нибудь его клеточное разбиение и обозначим через α_r число r -мерных клеток этого разбиения ($r = 0, 1, 2, \dots$). Тогда эйлерова характеристика полиэдра X , т. е. число $\chi(X) = \sum (-1)^r \alpha_r$, может быть вычислена по его числам Бетти: $\chi(X) = \sum (-1)^r p_r(X)$ (суммирование распространено на все значения $r = 0, 1, 2, \dots$ вплоть до наибольшей из размерностей клеток полиэдра X).

Пример 57. *Трехмерная сфера S^3 определяется как граница шара в четырехмерном пространстве R^4 ; в декартовых прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3, x_4 она определяется уравнением*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Рассматривая «четырёхмерный аналог» рисунков 157 (с. 117) и 7 (с. 12), нетрудно доказать, что трехмерная сфера с выколотой точкой гомеоморфна трехмерному евклидову пространству, а потому — открытому трехмерному шару. Следовательно, трехмерную сферу можно представить в виде клеточного разбиения, состоящего только из двух клеток: нульмерной клетки o и трехмерной клетки v . Поэтому (ср. пример 54) группы гомологий $H_0(S^3)$ и $H_3(S^3)$ являются свободными циклическими, а в остальных размерностях группы гомологий трехмерной сферы тривиальны. Из этого следует, что $p_0(S^3) = p_3(S^3) = 1$, $p_1(S^3) = p_2(S^3) = 0$.

Пример 58. Подобно тому, как склеивание противоположных сторон квадрата дает тор, склеивание противоположных граней куба дает трехмерный тор T^3 (его не следует путать с полным тором, см. пример 56). Например, на гранях $ABCD$ и $abcd$ (рис. 185) склеиваются между собой точки, которые являются концами отрезка, параллельного ребрам Aa, Bb, Cc, Dd . Все вер-

шины куба склеиваются вместе, что дает одну нульмерную клетку. Далее, все параллельные ребра склеиваются вместе; после склеивания остаются три одномерные клетки. Попарное склеивание противоположных граней дает три двумерные клетки. Наконец, мы имеем одну трехмерную клетку. Это и дает клеточное разбиение трехмерного тора T^3 . Каждая из клеток имеет границу, равную нулю, и потому группа гомологий $H_3(T^3)$ трехмерного тора T^3 является свободной циклической, а каждая из

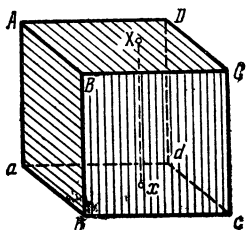


Рис. 185.

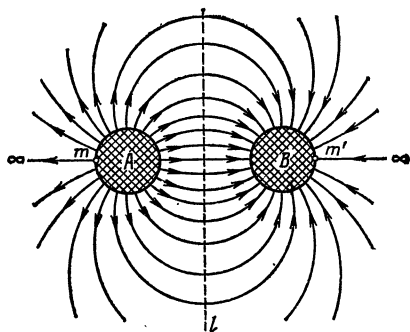


Рис. 186.

групп $H_1(T^3), H_2(T^3)$ является свободной абелевой группой с тремя образующими. Из этого следует, что $p_0(T^3) = p_3(T^3) = 1, p_1(T^3) = p_2(T^3) = 3$.

Пример 59. Покажем, что из двух полных торов, склеивая их друг в другом границами, можно получить трехмерную сферу. Тор (см. рис. 5 на с. 12) разбивает пространство на две части: внутреннюю, представляющую собой полный тор, и внешнюю. При пополнении трехмерного пространства одной точкой (в результате чего получается трехмерная сфера) внешняя часть также превращается в полный тор (что и дает разбиение трехмерной сферы на два склеенных между собой полных тора). Это ясно из рассмотрения рис. 186. При вращении этого чертежа вокруг прямой l каждая «силовая линия», начинающаяся на «заряде» A и кончающаяся на B (включая и линию $m \infty m'$, которая представляет собой одну линию, ибо имеется только одна бесконечно удаленная точка), дает топологический круг, и все такие круги заполняют внешность тора, получающегося при вращении «зарядов» A и B . Этим кругам имеется столько,

сколько точек на «окружности» «заряда» A . Таким образом, внешность тора (пополненная одной бесконечно удаленной точкой) гомеоморфна полному тору.

Задачи

189. Докажите, что для трехмерного шара X группы $H_1(X)$, $H_2(X)$, $H_3(X)$ тривиальны.

190. Рассмотрим часть трехмерного пространства, ограниченную двумя концентрическими сферами («трехмерное кольцо»), и отождествим (склеим) каждые две точки этих сфер, лежащие на одном радиусе. Докажите, что у получающегося полиэдра X все группы гомологий $H_0(X)$, $H_1(X)$, $H_2(X)$, $H_3(X)$ — свободные циклические.

191. Вычислите группы гомологий полиэдра, представляющего собой объединение поверхности P_k и ее внутренней области.

192. Вычислите гомологии *трехмерного проективного пространства*, которое получается из трехмерного шара, если на его границе склеить каждые две диаметрально противоположные точки.

193. Докажите, что любая замкнутая поверхность может быть без самопересечений расположена в трехмерном проективном пространстве.

194. Пусть X — полиэдр, рассматриваемый в некотором клеточном разбиении и α_r — число его r -мерных клеток ($r = 0, 1, \dots, \dots, n$, где n — наибольшая из размерностей клеток). Докажите, что для любого $r = 0, 1, \dots, n - 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} \alpha_k \geq \sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} p_k(X).$$

У к а з а н и е. Рассмотрите r -мерный остов X^r полиэдра X (состоящий из всех клеток рассматриваемого разбиения, имеющих размерность $\leq r$) и докажите соотношения

$$p_0(X^r) = p_0(X), \quad p_1(X^r) = p_1(X), \quad \dots, \\ p_{r-1}(X^r) = p_{r-1}(X), \quad p_r(X^r) \geq p_r(X).$$

Отметим в заключение, что при построении групп гомологий можно было бы в качестве коэффициентов брать не целые числа, а вычеты по модулю 2, вычеты по модулю m (или, вообще, элементы некоторой абелевой группы G). Получающиеся группы гомологий обозначаются через $H_r(X, Z_2)$, $H_r(X, Z_m)$, $H_r(X, G)$. Например, если коэффициентами являются вычеты по модулю 2, то все клетки можно рассматривать *не ориентированными*. В случае, когда группой коэффициентов является циклическая группа порядка p , где p — простое число, группа гомологий $H_r(X, Z_p)$ является прямой суммой нескольких групп, изоморфных Z_p ; число слагаемых в этой прямой сумме называется r -мерным числом Бетти полиэдра X по модулю p .

Задачи

195. Докажите, что для проективной плоскости N_2 группы $H_0(N_1, Z_2)$, $H_1(N_1, Z_2)$, $H_2(N_1, Z_2)$ являются группами второго порядка.

196. Докажите, что поверхности P_k и N_{2k} имеют (во всех размерностях) одинаковые группы гомологий по модулю 2.

197. Вычислите для трехмерного проективного пространства (см. задачу 192) гомологии по модулю 2.

27. Топологическое произведение

Пример 60. Каждая точка цилиндра E (рис. 187) может быть задана парой точек (x, y) , где x лежит на нижнем основании B , а y — на образующей F ; проведя через x отрезок, параллельный F , а через y — круг, параллельный B , мы получим на их пересечении искомую точку цилиндра. Таким образом, цилиндр E можно

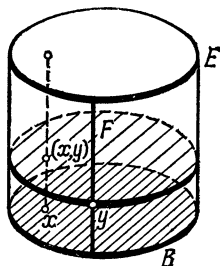


Рис. 187.

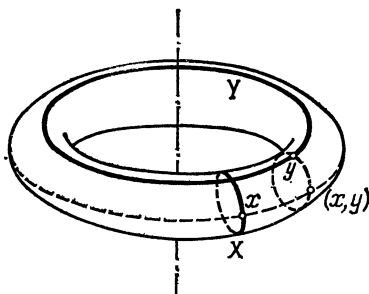


Рис. 188.

рассматривать как множество всех пар (x, y) , где x — точка одной фигуры B (круга), а y — точка другой фигуры F (отрезка).

Пример 61. На торе E (рис. 188) проведем меридиан B и параллель F . Для задания любой точки тора достаточно указать точку $x \in B$ и точку $y \in F$; проведя через x параллель, а через y меридиан, мы получим на их пересечении искомую точку тора. Таким образом, тор E можно рассматривать как множество всех пар (x, y) , где $x \in B$, $y \in F$.

В рассмотренных примерах мы имели топологическое произведение фигур B и F : цилиндр есть топологическое произведение круга и отрезка, тор — топологическое произведение двух окружностей. Вообще, фигура E называется топологическим произведением фигур B и F .

если E можно рассматривать как множество всевозможных пар (x, y) , где $x \in B$, $y \in F$. Отметим, что здесь говорится лишь о том, из каких точек состоит фигура E , но следует еще указать топологию в фигуре E . Наглядно эту топологию можно описать, сказав, что точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) фигуры E будут «близкими», если x_1 и x_2 являются «близкими» в B , а y_1 и y_2 являются «близкими» в F .

Существенно, чтобы каждой точке фигуры E соответствовала некоторая пара (x, y) и чтобы различные пары соответствовали различным точкам фигуры E .

Пример 62. Рассмотрим на сфере экватор B и нулевой меридиан F . Для задания точки на сфере достаточно указать ее географические координаты, т. е. точки $x \in B$, $y \in F$; проведя через эти точки меридиан и параллель (рис. 189), мы получим на их пересечении искомую точку (x, y) сферы. Но это не значит, что сфера — топологическое произведение экватора и меридиана; действительно, если x и x' — две различные точки экватора, а n — верхний конец меридиана (северный полюс), то различными парам (x, n) и (x', n) соответствует одна и та же точка n на сфере.

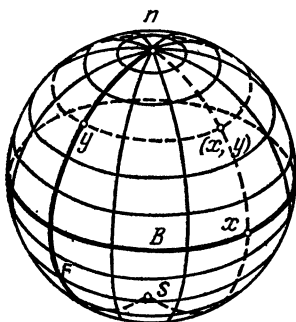


Рис. 189.

Задачи

198. Докажите, что кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями, есть топологическое произведение окружности и отрезка.

199. Докажите, что полный тор (пример 56) является топологическим произведением круга и окружности.

200. Докажите, что полиэдр X , рассмотренный в задаче 190, является топологическим произведением сферы и окружности.

201. Докажите, что трехмерный тор T^3 является топологическим произведением обычного (двумерного) тора и окружности. Можно также сказать, что T^3 — топологическое произведение трех окружностей.

Рассмотрим теперь вопрос о гомологических свойствах топологического произведения, ограничиваясь для простоты рассмотрением не групп гомологий, а лишь чисел Бетти. Если в примере 61 считать меридиан и параллель одномерными циклами, то их топологическое

произведение (тор) будет двумерным циклом. Вообще, если E — топологическое произведение полиэдров B и F , в которых соответственно взяты циклы z, z' размерностей r, r' , то можно рассмотреть произведение этих циклов, которое будет $(r + r')$ -мерным циклом в полиэдре E . Оказывается, что таким путем (перемножением циклов, взятых в B и F) можно получить систему гомологически независимых циклов в полиэдре E . Для этого нужно сначала взять максимальное число гомологически независимых нульмерных циклов в B и r -мерных циклов в F ; перемножая эти циклы, мы получим $p_0(B) p_r(F)$ циклов в E , имеющих размерность r . Затем нужно взять максимальное число гомологически независимых одномерных циклов в B и $(r - 1)$ -мерных в F ; перемножая, мы получим еще $p_1(B) p_{r-1}(F)$ циклов в E , имеющих размерность r . Затем нужно взять двумерные циклы в B и $(r - 2)$ -мерные в F и т. д. Соединяя все полученные циклы вместе, мы и получим максимальное число r -мерных гомологически независимых циклов в полиэдре E . Таким образом, если E — топологическое произведение полиэдров B и F , то

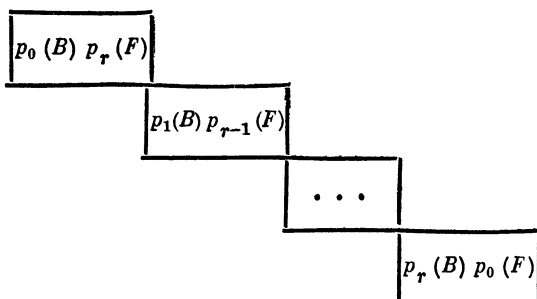
$$p_r(E) = p_0(B) p_r(F) + p_1(B) p_{r-1}(F) + \dots + p_r(B) p_0(F).$$

Этой формуле можно дать следующее «графическое» истолкование. Составим таблицу, у которой на пересечении i -го столбца и j -й строки стоит число $p_i(B) p_j(F)$:

...
$p_j(F)$	$p_0(B) p_j(F)$	$p_1(B) p_j(F)$...	$p_i(B) p_j(F)$...
...
$p_2(F)$	$p_0(B) p_2(F)$	$p_1(B) p_2(F)$...	$p_i(B) p_2(F)$...
$p_1(F)$	$p_0(B) p_1(F)$	$p_1(B) p_1(F)$...	$p_i(B) p_1(F)$...
$p_0(F)$	$p_0(B) p_0(F)$	$p_1(B) p_0(F)$...	$p_i(B) p_0(F)$...

$p_0(B)$	$p_1(B)$...	$p_i(B)$...
----------	----------	-----	----------	-----

Тогда суммирование чисел, стоящих на r -й диагонали этой таблицы, и дает r -мерное число Бетти полиэдра E :



Задачи

202. Составьте указанную таблицу для топологического произведения сферы и окружности; вычислите этим приемом числа Бетти полиэдра, рассмотренного в задаче 190 (см. также задачу 200).

203. Докажите, что если полиэдр E является топологическим произведением полиэдров B и F , то $\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F)$.

204. Вычислите числа Бетти n -мерного тора (т. е. топологического произведения n окружностей).

205. Докажите, что трехмерная сфера не гомеоморфна топологическому произведению окружности и некоторой поверхности. То же докажите для трехмерного проективного пространства.

28. Расслоения

Вернемся к примеру 60 и обозначим через p проекцию цилиндра E на его основание B . Для каждой точки $x \in B$ прообраз $p^{-1}(x)$ представляет собой отрезок, параллельный F . Эти отрезки будем называть *слоями*. Над каждой точкой x базисной фигуры B расположен («растет») соответствующий слой, а весь цилиндр *расслаивается* и представляет собой объединение всех слоев (как бы связку стерженьков).

Вообще проекция p , ставящая в соответствие точке $(x, y) \in E$ точку $x \in B$, отображает топологическое произведение E фигур B и F на базу B , причем прообраз $p^{-1}(x)$ любой точки $x \in B$ (слой, «растущий над x »), гомеоморфен F . Это можно проследить в примере 61 и в задачах 198—201.

Рассмотрим теперь проекцию p винтовой линии E на окружность B (см. пример 48 на с. 110). Каждый прообраз $p^{-1}(x)$ («слой, растущий над точкой $x \in B$ ») гомео-

морфизм множеству F , состоящему из точек $\dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ числовой прямой. Этот пример отличается от топологического произведения окружности B и слоя F (которое состоит из бесконечного числа отдельных окружностей; рис. 190). Однако прообраз $p^{-1}(U)$ окрестности U распадается на отдельные листы, т. е. $p^{-1}(U)$ есть топологическое произведение окрестности U и слоя F (см. рис. 146 на с. 110). Иначе говоря, локально (т. е. в окрестности каждой точки $x \in B$) E является топологическим произведением, но в целом — нет. В топологии в таких случаях используют термин *локально тривиальное расслоение* (т. е. топологическое произведение считается в топологии «тривиальным» расслоением). Вообще, любое накрытие является локально тривиальным расслоением, причем слой F этого расслоения состоит из изолированных точек. В примере 49 (с. 111) слой состоит из двух точек, накрытие E представляет собой ориентируемую поверхность, а база B — неориентируемую.

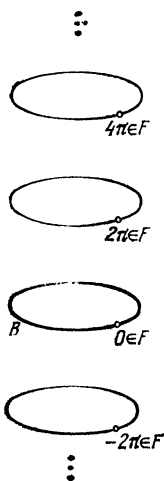


Рис. 190.

Пример 63. Обозначим через B среднюю линию ленты Мёбиуса E . Через каждую точку $x \in B$ проходит поперечный отрезок, который мы будем считать слоем, «растущим» над точкой x (эти поперечные отрезки получаются из поперечных отрезков прямоугольной ленты при склеивании ее в ленту Мёбиуса). Отображая каждый поперечный отрезок в соответствующую точку x , мы получаем проекцию $p: E \rightarrow B$, причем $p^{-1}(x)$ есть слой над точкой $x \in B$. Это расслоение локально тривиально. В самом деле, если взять на окружности B небольшую дугу U , то ее прообраз $p^{-1}(U)$ представляет собой топологическое произведение дуги U и слоя F (рис. 191). В целом же лента Мёбиуса E не является топологическим произведением окружности B и отрезка F (см. задачу 198).

Пример 64. Еще одним примером локально тривиального расслоения служит *нормированный касательный пучок* поверхности. Пусть B — ориентируемая поверхность. Обозначим через E множество всех векторов длины 1, касающихся поверхности B . Через $p: E \rightarrow B$ обозначим

отображение, сопоставляющее каждому касательному вектору $z \in E$ ту точку $x \in B$, из которой этот вектор «растет». Слой $p^{-1}(x)$ над точкой $x \in B$ (состоящий из всех векторов длины 1, касающихся поверхности в точке x) гомеоморфен окружности. Отображение

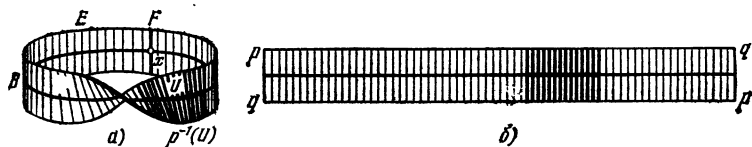


Рис. 191.

$p: E \rightarrow B$ является локально тривиальным расслоением. В самом деле, маленькую окрестность U точки x на поверхности B можно считать кусочком плоскости, и потому каждый вектор z , касающийся поверхности B в какой-либо точке $x \in U$, может быть задан как пара (x, y) , где y — точка единичной окружности F (рис. 192). Иначе говоря, $p^{-1}(U)$ представляется в виде топологического произведения окрестности U и окружности F .

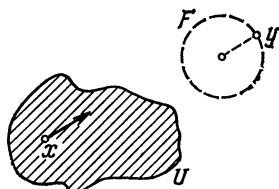


Рис. 192.

Пусть, в частности, E — нормированный касательный пучок сферы S^2 (т. е. множество всех единичных векторов, касающихся этой сферы). Пространство E можно представить в виде клеточного разбиения, состоящего из четырех клеток. В самом деле, пусть $x_0 \in S^2$ и F_0 — слой над точкой x_0 . Выберем точку $\tau^0 \in F_0$ и оставшуюся часть слоя F_0 (одномерную клетку) обозначим через τ^1 . Далее, пусть v — векторное поле на сфере S^2 , имеющее в точке x_0 единственную особенность (с индексом $+2$). Поле v можно рассматривать как двумерную клетку в E . Эта клетка проектируется на всю сферу S^2 с выколотой точкой x_0 , а с каждым слоем (кроме F_0) пересекается в одной точке. Наконец, выбросив из E клетки $\tau^0, \tau^1, \tau^2 = v$, мы получим множество τ^3 , гомеоморфное открытому трехмерному шару. Таким образом, E представляется в виде клеточного разбиения $\{\tau^0, \tau^1, \tau^2, \tau^3\}$. Заметим, что граница клетки $v = \tau^2$ представляет собой дважды обегаемый слой F_0 , т. е. $\partial\tau^2 = 2\tau^1$. Остальные клетки имеют нулевую границу: $\partial\tau^3 = 0, \partial\tau^1 = 0, \partial\tau^0 = 0$. Из этого нетрудно заключить, что числа Бетти

пространства E имеют следующие значения: $p_0(E) = p_3(E) = 1$, $p_1(E) = p_2(E) = 0$. Заметим, что при рассмотрении гомологий по модулю 2 имеем $\partial\tau^2 = 0$, и потому числа Бетти пространства E по модулю 2 имеют вид $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$.

Задачи

206. Докажите, что бутылку Клейна можно представить в виде локально тривиального расслоения, базой и слоем которого является окружность.

207. Докажите, что нормированный касательный пучок двумерного тора T гомеоморфен трехмерному тору.

208. Докажите, что если локально тривиальное расслоение имеет своей базой двумерную сферу, а слоем — окружность, то пространство E этого расслоения можно получить из двух полных торов, склеивая их границами.

209. Докажите, что если базой локально тривиального расслоения является окружность, а слоем — отрезок, то E гомеоморфно либо круговому кольцу, либо ленте Мёбиуса.

Французскому математику Жану Лере принадлежит важная теорема о гомологиях расслоенных пространств. Мы сформулируем ее здесь в упрощенном виде.

Пусть $p: E \rightarrow B$ — некоторое расслоение, базой которого является связный полиэдр, имеющий тривиальную фундаментальную группу, а слоем — произвольный полиэдр. Составим таблицу, которую мы имели для случая, когда E — топологическое произведение фигур B и F , и в этой таблице наметим стрелки «ходом коня» (рис. 193). На каждой стрелке надпишем некоторое неотрицательное целое число, придерживаясь следующих правил: 1) число, стоящее в каждой клетке, не меньше, чем сумма чисел, написанных на тех двух стрелках, одна из которых входит в данную клетку, а другая выходит из нее; 2) если начало или конец стрелки выходят за пределы таблицы, то на этой стрелке надписывается число 0. То, что получается, назовем *таблицей* E_2 .

Теперь составим новую таблицу. В каждой клетке поставим новое число, получающееся, если из числа, ранее стоявшего в этой клетке, вычесть сумму чисел, на входящей и исходящей стрелках. Затем наметим стрелки «удлиненным ходом коня» (рис. 194) и на них надпишем числа по тем же правилам. Это дает *таблицу* E_3 .

Таким же путем из таблицы E_3 получаем *таблицу* E_4 и т. д. Вообще в *таблице* E_n стрелки ведут на n клеток влево и на $n - 1$ клетку вверх.

Ясно, что какую бы мы ни взяли клетку, стоящие в ней числа (в таблицах E_2, E_3, E_4, \dots) в конце концов перестанут меняться, стабилизируются; стрелки становятся все

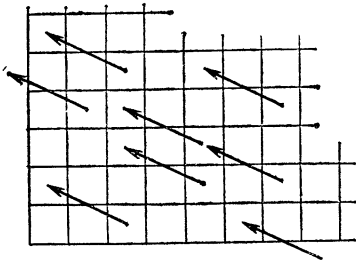


Рис. 193.

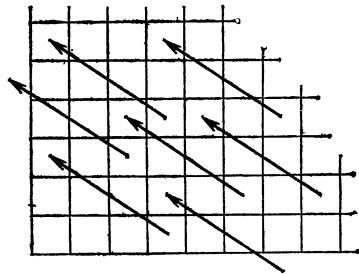


Рис. 194.

длиннее и в конце концов будут выходить за пределы таблицы. Таблицу, составленную из стабилизировавшихся чисел, назовем *таблицей* E_∞ (стрелок в ней нет). Теорема Лере утверждает, что *существует такой способ надписывания чисел на стрелках, при котором суммирование чисел, стоящих на r -й диагонали таблицы E_∞ , дает r -мерное число Бетти пространства E* . Аналогичная теорема справедлива и для чисел Бетти по простому модулю p .

Пример 65. Пусть $p: E \rightarrow B$ — некоторое расслоение, базой которого служит сфера S^2 , а слоем — окружность S^1 . Тогда $p_0(B) = p_2(B) = 1$, $p_0(E) = p_1(E) = 1$, а остальные числа Бетти базы и слоя равны нулю. Поэтому таблица E_2 имеет вид, показанный на рис. 195 (во всех клетках, кроме указанных четырех, записано число 0; на всех стрелках, кроме указанной, надписано число 0). На указанной стрелке может быть надписано либо число 0, либо 1. Таблица E_3 совпадает с E_∞ (все стрелки выходят за пределы таблицы). Следовательно, по теореме Лере, пространство E рассматриваемого расслоения может иметь либо числа Бетти $p_0(E) = p_1(E) = p_2(E) = p_3(E) = 1$ (если на стрелке надписан 0), либо число Бетти $p_2(E) = p_3(E) = 1$, $p_1(E) = p_2(E) = 0$ (если надписана единица). Первая возможность реализуется, например, для топологического произведения сферы S^2 и окружности S^1 (см. задачу 200). Вторая возможность реализуется для касательного пучка сферы S^2 (см. пример 64).

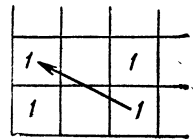


Рис. 195.

29. Теория Морса

Наличие горизонтальной касательной — необходимое условие для того, чтобы дифференцируемая функция достигала максимума или минимума (локального) во внутренней точке x_0 своей области определения. Однако это условие не является достаточным: в точке перегиба с горизонтальной касательной функция не достигает ни максимума, ни минимума.

Заметим, что точки максимума и минимума устойчивы относительно малых «шевелений» графика (рис. 196, а). Точка перегиба (с горизонтальной касательной) устойчивостью не обладает: при «шевелении» графика она может пропасть (т. е. вблизи нее не будет точек с горизонтальной касательной; рис. 196, б).

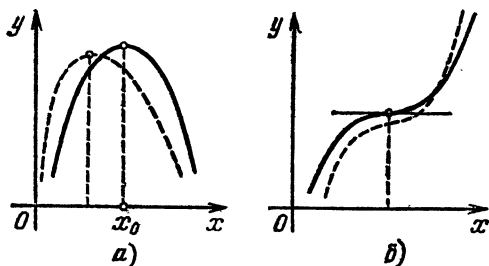


Рис. 196.

Для функций от двух переменных x, y (заданных в некоторой области на плоскости) можно указать аналогичное необходимое условие: для того чтобы функция $f(x, y)$ достигала локального максимума или минимума во внутренней точке (x_0, y_0) своей области определения, необходимо, чтобы эта точка была критической, т. е. чтобы график функции имел в точке (x_0, y_0) горизонтальную касательную плоскость.

Пример 66. На рисунке 197 изображены графики функций

$$\begin{aligned} f_0(x, y) &= c + x^2 + y^2, & f_1(x, y) &= c + x^3 - y^3, \\ f_2(x, y) &= c - x^2 - y^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Точка $(0; 0)$ является для каждой из них критической: для $f_0(x, y)$ — это точка минимума, для $f_2(x, y)$ — точка максимума, а функция $f_1(x, y)$ не имеет в точке $(0; 0)$ ни максимума, ни минимума — это так называемая седловая

точка. Все эти точки устойчивы относительно малых «шевелений» графика. Существуют и более сложные критические точки; например, функция $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ имеет в начале координат «седло третьего порядка» (три

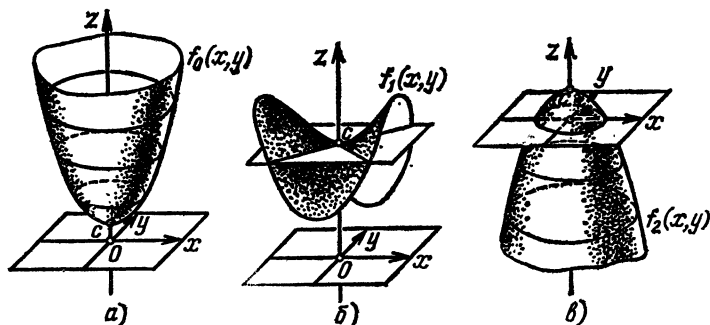


Рис. 197.

спуска и три подъема, а не два, как на рис. 197, б). Однако как угодно малым «шевелением» графика можно добиться, чтобы все критические точки стали невырожденными — такими, как на рис. 197.

Можно также рассматривать функции, заданные не на плоскости, а на поверхности — ведь вблизи каждой своей точки поверхность топологически устроена так же, как плоскость.

Пример 67. Для любой точки p , принадлежащей тору T , обозначим через $f(p)$ высоту точки p над горизонтальной плоскостью Π . Эта функция имеет

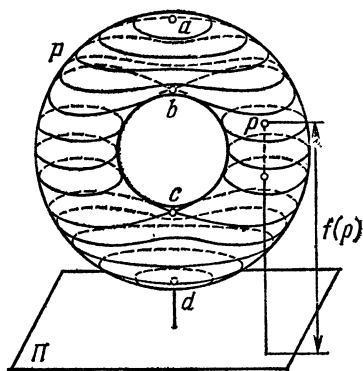


Рис. 198.

(при показанном на рис. 198 расположении тора) одну точку максимума a , одну точку минимума d и две седловые точки b, c . Таким образом, если мы обозначим через C_0 число точек минимума, через C_1 — число седловых точек, а через C_2 — число точек максимума, то в этом примере $C_0 = 1, C_1 = 2, C_2 = 1$, и потому $C_0 - C_1 + C_2 = 0$.

Пример 69. Для сферы, расположенной обычным образом, та же функция $f(p)$ («высота» точек над горизон-

тальной плоскостью) имеет две критические точки: точку минимума («южный полюс») и точку максимума («северный полюс»). Таким образом, в этом случае $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, т. е. $C_0 - C_1 + C_2 = 2$.

Рассмотренные примеры подводят к формулировке теоремы о критических точках, принадлежащей английскому математику Морсу. Условимся говорить, что точка минимума имеет индекс 0, седловая точка — индекс 1, а точка максимума — индекс 2. Теперь мы можем сформулировать «первую половину» теоремы Морса (для случая поверхности): *пусть на поверхности Q задана функция, имеющая только невырожденные критические точки; тогда*

$$C_0 - C_1 + C_2 = \chi(Q), \quad (22)$$

где C_0 — число критических точек индекса 0 (т. е. точек минимума), C_1 — число критических точек индекса 1 (седел), C_2 — число критических точек индекса 2 (точек максимума).

В самом деле, функция f определяет на поверхности Q *линии уровня* (вдоль каждой из которых функция f принимает постоянное значение). Кроме того, можно на Q наметить *линии наискорейшего спуска*, вдоль которых функция f наиболее быстро убывает; они перпендикулярны линиям уровня. Векторы, касающиеся линий наискорейшего спуска, образуют векторное поле на поверхности Q . В точках, не являющихся критическими, это векторное поле не имеет особенностей. На рис. 199

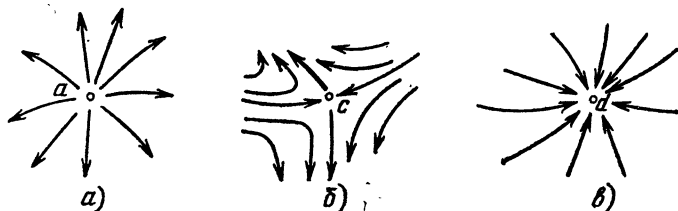


Рис. 199.

показан вид векторного поля вблизи точки минимума (а), седловой точки (б), точки максимума (в). Легко проверяется, что $j = (-1)^k$, где j — индекс особенности векторного поля, а k — индекс критической точки (см. рис. 89 на с. 69). Следовательно, рассматриваемое векторное поле имеет C_0 особенностей с индексом $+1$ (минимумы), C_1 особенностей с индексом -1 (седловые точки) и еще C_2

особенностей с индексом $+1$ (максимумы). Из теоремы Пуанкаре о векторных полях (п. 14) теперь следует справедливость формулы (22) для любой замкнутой ориентируемой поверхности.

Задачи

210. Докажите, что формула (22) справедлива и для любой замкнутой неориентируемой поверхности.

211. Докажите, что если на поверхности P_k задана функция, все критические точки которой невырождены, то число критических точек не меньше $2k + 2$.

Рассмотрим теперь «вторую половину» теоремы Морса: пусть на поверхности Q задана функция, имеющая только невырожденные критические точки; тогда

$$C_0 \geq p_0(Q), \quad C_1 - C_0 \geq p_1(Q) - p_0(Q). \quad (23)$$

Для доказательства продолжим предыдущие рассуждения. Будем считать, что значения, которые функция f принимает в критических точках, попарно различны. Мы можем считать критические точки a_1, \dots, a_q перенумерованными таким образом, что $f(a_1) > f(a_2) > \dots > f(a_q)$.

Вблизи a_1 (точки наибольшего максимума, рис. 200, а) линии уровня замкнуты и окружают точку a_1 . Разрезав поверхность по одной из этих линий, мы получим двумерную клетку τ_1 и остаток Q (рис. 200, б).

Теперь упростим фигуру Q_1 . Для этого рассмотрим линию уровня, проходящую чуть выше точки a_2 , и отрезем от Q_1 часть F_1 , расположенную выше этой линии уровня (рис. 200, в). Оставшуюся часть поверхности обозначим через Q_1' . Так как между a_1 и a_2 критических точек нет, то вся часть F_1 заполнена «параллельно идущими» линиями наискорейшего спуска, и по этим линиям можно F_1 «сдвинуть» вниз в Q_1' . Так как при этом сдвиге (как и при всякой гомотопии) любой цикл переходит в гомологичный, то фигура Q_1 имеет те же гомологии, что и Q_1' .

Рассмотрим линию уровня l , проходящую чуть ниже точки a_2 , и обозначим через Q_2 часть поверхности, лежащую ниже этой линии. Пусть, например, a_2 является седлом. Мы можем сдвинуть (по линиям наискорейшего спуска) Q_1' в Q_2 — всюду, за исключением окрестности точки a_2 (рис. 200, в). Затем можно сжать оставшуюся «перемычку» в одномерную клетку τ_2 , приклеенную к Q_2 (рис. 200, д). Эти деформации не изменяют гомологий. Следовательно, первоначальная поверхность Q имеет те

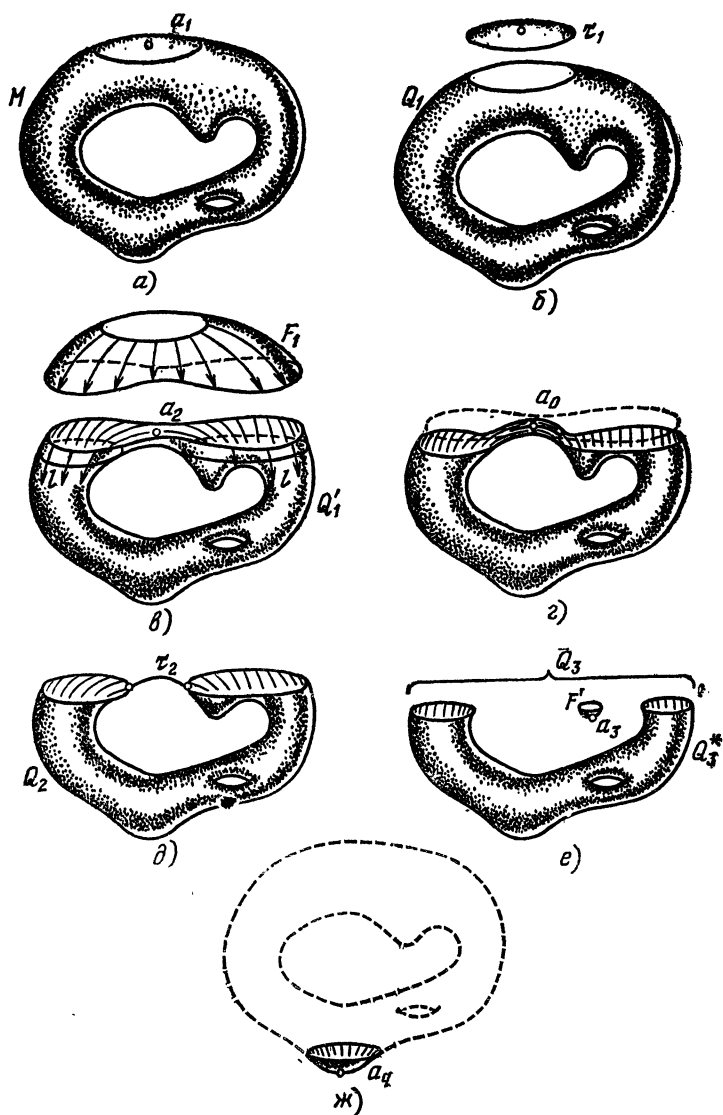


Рис. 200.

же гомологии, что и фигура, получающаяся из Q_2 приклеиванием одномерной клетки τ_2 (соответствующей седлу), а затем двумерной клетки τ_1 (соответствующей максимуму).

Далее мы сдвинем Q_2 в часть Q_2^* , лежащую ниже линии уровня, проходящей чуть выше точки a_3 . Если a_3 есть точка минимума, то оставшаяся вблизи точки a_3 часть F' поверхности (т. е. круг) имеет те же гомологии, что и точка, т. е. нульмерная клетка τ_3 (рис. 200, е). Обозначив фигуру, получающуюся из Q_3 отбрасыванием куска F' , через Q_3^* , мы находим, что первоначальная поверхность Q имеет те же гомологии, что и фигура, получающаяся из Q_3^* добавлением нульмерной клетки τ_3 , одномерной τ_2 , двумерной τ_1 .

В конце концов, мы оставим от первоначальной поверхности последнюю точку минимума a_q (рис. 200, ж). Идя обратным путем, мы найдем, что фигуру, имеющую те же гомологии, что и поверхность Q , можно получить последовательным приклеиванием клеток: каждой точке минимума соответствует нульмерная клетка, седлу — одномерная клетка, а максимуму — двумерная. Иначе говоря, Q имеет те же гомологии, что и некоторый полиэдр, содержащий C_0 нульмерных, C_1 одномерных и C_2 двумерных клеток. Из этого и вытекает справедливость неравенств (23) (см. задачу 194 на с. 133).

Задачи

212. Докажите, что соотношения (22), (23) справедливы для чисел Бетти по любому простому модулю p .

213. Докажите, что $C_r \geq p_r(Q)$, $r = 0, 1, 2$.

Заметим в заключение, что можно рассматривать функции и на «многомерных поверхностях» (в задачах 190, 192 и примерах 57, 58 рассматриваются «трехмерные поверхности»). На n -мерной «поверхности» Q имеется $n + 1$ типов невырожденных критических точек (в формулах, аналогичных (21), может быть в правой части $0, 1, \dots, n$ минусов). Теорема Морса (и рассмотренное ее доказательство) сохраняются и в этом случае. Например, неравенства (23) принимают вид

$$\sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} C_k \geq \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} p_k(Q), \quad r = 0, 1, \dots, n.$$

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

В. П. Минеев

Многие математические понятия или даже целые теории, появившись на свет, долгие годы живут, не имея приложений вне самой математики. В качестве примера достаточно вспомнить историю о загадочными комплексными числами, вошедшими в физику и технику спустя несколько столетий после своего открытия. Хорошим примером подобного рода до недавнего времени могла служить и топология. Однако в течение последнего десятилетия в нескольких довольно далеких друг от друга областях физики возник ряд задач, получивших свою адекватную формулировку и решение на языке топологии, что позволило значительно продвинуться в соответствующих разделах физики.

Наглядную иллюстрацию к сказанному дает биофизика полимеров, имеющая дело с гигантскими молекулами белков и нуклеиновых кислот. Рассматривая положения, которые молекула может занимать в пространстве, мы сталкиваемся с ограничениями топологической природы. В самом деле, чисто математически длинная замкнутая молекула представляет собой замкнутую линию. Мы знаем, что такие линии образуют узлы. Различные узлы нельзя продеформировать друг в друга без разрыва линии и последующего склеивания концов. Условие неразрывности линий обеспечено тем, что для создания разрыва необходимо разорвать химические связи в данной точке полимерной цепи. Энергетические затраты такого процесса довольно значительны. Поэтому при достаточно низкой температуре вероятность разрывов мала и молекулы полимера могут существовать в состоянии с данной узельной конфигурацией практически неограниченно долго. Важный вопрос, какая часть молекул из общего числа молекул заданной длины обладает определенной узельной конфигурацией, решается на основе перечисления типов топологически различных узлов, известном из алгебраической топологии.

В биофизике полимеров сами длинные молекулы образуют топологические объекты — узлы. В других областях физики мы приходим к объектам, обладающим топологическими свойствами, уже не столь непосредственным образом. Так, в теории поля фигурируют частицы, математически описываемые векторными полями

с топологическими особенностями. В физике конденсированного состояния с топологией оказалась связана устойчивость ряда дефектов структуры упорядоченных веществ: обычных и жидких кристаллов, сверхпроводников, сверхтекучих жидкостей и ферромагнетиков. В этом приложении мы познакомимся с простейшим веществом, устойчивость дефектов которого имеет топологическую природу. Это нематический жидкий кристалл, часто называемый просто «нематик». Необходимые математические понятия: индекс векторного поля, фундаментальная группа, степень отображения и др., в приложении разъясняются весьма бегло. Точные определения и комментарии к ним можно найти в основном тексте книги.

1. Нематик

Нематический жидкий кристалл состоит из удлиненных молекул, взаимодействие между которыми стремится выстроить их параллельно друг другу. При высоких температурах тепловое движение препятствует этому и вещество представляет обычную жидкость (рис. 1, а). При температурах ниже некоторой критической (типичные значения температур перехода для нематиков порядка нескольких десятков градусов Цельсия) в жидкости

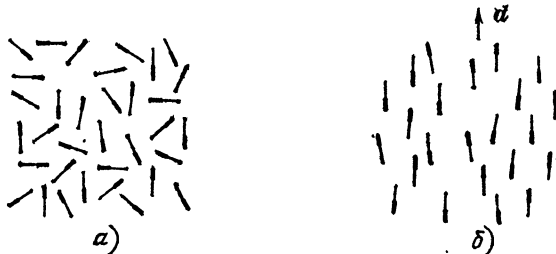


Рис. 1.

появляется выделенное направление, вдоль которого преимущественно ориентированы оси молекул. При этом, как и в обычной жидкости, распределение центров тяжести молекул нематика остается хаотическим (рис. 1, б). Небольшие отклонения осей молекул от параллельного друг другу направления связаны с тепловыми колебаниями. Математически направление преимущественной ориентации описывается с помощью единичного вектора \mathbf{d} , называемого *директором*. Особое название вектора \mathbf{d} связано с тем, что, хотя концы длинных молекул отличаются друг от друга, но их расположение неупорядоченно (см. рис. 1, б) и состояния нематика с противоположными направлениями вектора \mathbf{d} (\mathbf{d} и $-\mathbf{d}$) физически неразличимы. Другими словами, векторы \mathbf{d} можно

представлять не как стрелочки, а как палочки, задающие лишь направление (direction), но не его знак.

Из-за влияния стенок сосуда и внешних полей (например, магнитного) состояния нематика всегда неоднородны. Это значит, что направление директора \mathbf{d} постепенно меняется от точки к точке. Распределение \mathbf{d} в пространстве называется *векторным полем* единичного вектора \mathbf{d} .

2. Дисклинации в нематике

Благодаря сильному рассеянию света нематический жидкий кристалл выглядит как мутная непрозрачная жидкость. Если разглядывать ее в микроскоп, то можно заметить длинные тонкие нити, плавающие в жидкости. Именно они и дали название этому типу жидких кристаллов (нема — по-гречески «нить»). Еще в начале века исследователи понимали, а теперь это твердо

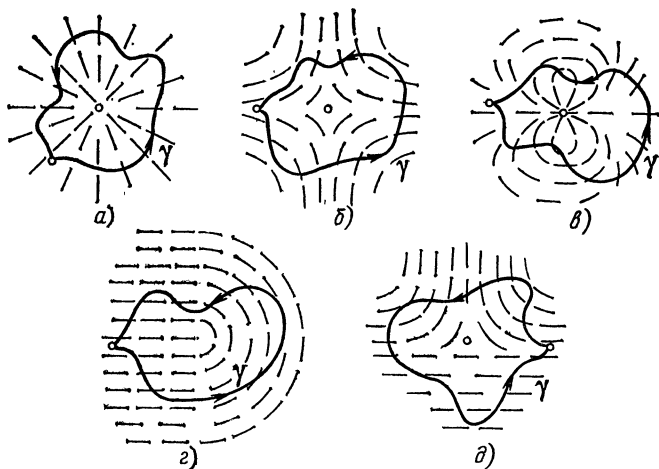


Рис. 2.

установленный факт, что нити в нематиках — не посторонние включения, а особенности в расположении молекул.

В самом деле, в поле направлений директора \mathbf{d} возможны особые линии, на которых направление \mathbf{d} не определено (разрывно). Такие распределения \mathbf{d} проще всего изобразить в случае плоских векторных полей, т. е., когда все векторы \mathbf{d} в пространстве параллельны некоторой плоскости (см. рис. 2, где поле директора показано черточками). Мы знаем, что особые точки векторных полей на плоскости характеризуются *индексами особой точки* — числом ν полных оборотов в положительном направлении, совершаемых

вектором d при обходе особой точки по замкнутому контуру γ . Так, особой точкой, изображенной на рис. 2, a , соответствует индекс $\nu = 1$, на рис. 2, b — $\nu = -1$, на рис. 2, c — $\nu = 2$. Как мы помним, состояния, отличающиеся только знаком d , неразличимы, поэтому возможны особые точки, при обходе которых по замкнутому контуру γ вектор d совершает полуцелое число оборотов. Так, индекс особых точек, изображенных на рис. 2, e и d , равен соответственно $1/2$ и $-1/2$. Особые точки на рис. 2 представляют собой выход в плоскость рисунка особой линии в поле направлений d . Если взглянуть на особую линию рис. 2, a не «сверху», а «сбоку», то распределение d будет выглядеть, как показано на рис. 3, a . По предложению английского физика Франка линии разрыва в поле направлений директора были названы *дисклинациями*.

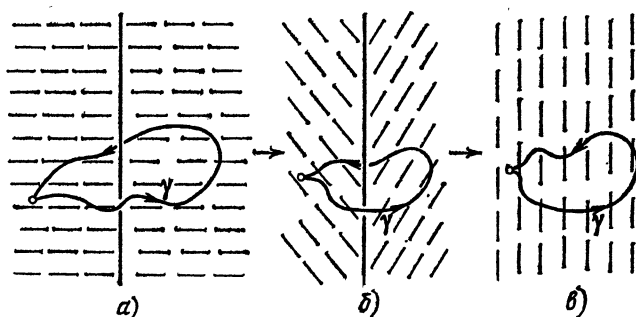


Рис. 3.

Так как взаимодействие между молекулами стремится выстроить их параллельно, наличие особых линий в распределении d энергетически невыгодно. Следовательно, в нематике должны возникать деформации распределения d , стремящиеся устранить особенности и перевести распределение в однородное, обладающее наименьшей энергией. Как это может произойти, легко увидеть на примере дисклинация, изображенной на рис. 3, a . Действительно, деформация, показанная на последовательности рисунков 3, a — c , переводит распределение в однородное, не обладающее никакими особенностями. Эта деформация поля d , напоминающая складывание зонтика, получила название «вытекание в третье измерение», так как направления d , первоначально лежащие в плоскости рис. 2, a , выстраиваются в перпендикулярном ей направлении (рис. 3, c). Таким образом, мы видим, что дисклинация, изображенная на рис. 2, a , 3, a , неустойчива по отношению к вытеканию в третье измерение. Спрашивается, устойчивы ли другие дисклинации? Как сформулировать признак, позволяющий отличать устойчивые дисклинации от неустойчивых?

Разумеется, любую дисклинацию можно уничтожить, создавая разрывы в поле директора, как это показано на последовательности рисунков 4, *a* — *в*. Заметим, однако, что в окрестности разрыва молекулы будут упорядочены не параллельно, как в нематике,

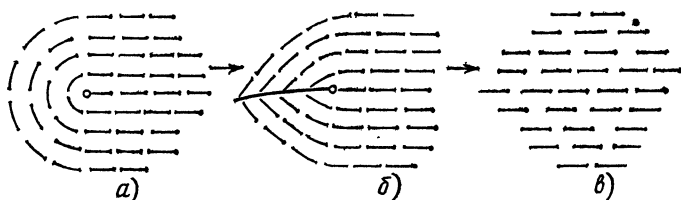


Рис. 4.

а под углом друг к другу, как в обычной жидкости. Значит, создание такого разрыва эквивалентно плавлению нематического порядка на целой полуплоскости, опирающейся на особую линию, что требует больших затрат энергии. Иначе говоря, этот процесс обладает колоссальным энергетическим барьером. Поэтому при исследовании устойчивости дисклинаций необходимо сразу ограничиваться лишь непрерывными деформациями поля d . Раз так, здесь может оказаться полезной топология.

3. Дисклинации и топология

Пусть в объеме, заполненном нематиком, имеется какое-то распределение векторов d . Иными словами, каждой точке r нашего объема поставлен в соответствие вектор d — задано векторное поле $d(r)$. Возьмем векторы d из разных точек объема и перенесем параллельно самим себе так, чтобы они начинались из одной точки (рис. 5, *a* и *б*). Тогда их концы будут лежать на поверхности сферы единичного радиуса, которая тем самым является областью изменения векторов d . Таким образом, мы получаем, что векторное поле $d(r)$ осуществляет отображение точек r нашего объема в точки на поверхности сферы единичного радиуса.

Заметим теперь, что сфера, по которой бегают концы вектора d , не совсем обычная. В самом деле, d не простой вектор, а вектор-директор, и состояния d и $-d$ физически неотличимы. Это значит, что диаметрально противоположные точки сферы эквивалентны или, как говорят в топологии, сфера склеена своими диаметрально противоположными точками. Такая сфера называется *проективной плоскостью* и обозначается RP^2 . Разумеется, представить результат склеивания диаметрально противоположных точек сферы в трехмерном пространстве невозможно, да и не нужно; достаточно лишь

помнить, что точки d и $-d$ — это не две разные, а одна и та же точка. Итак, векторное поле $d(r)$ осуществляет отображение точек r координатного пространства в точки проективной плоскости RP^2 .

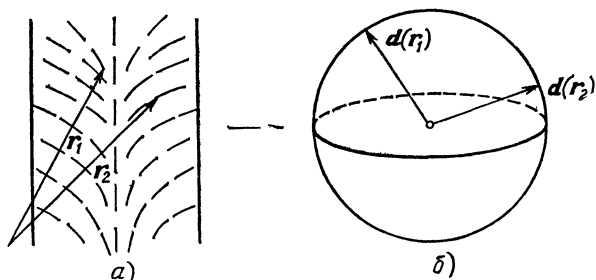


Рис. 5.

Посмотрим теперь, какое отношение имеет склейка к вопросу об устойчивости дисклинаций в нематике.

Пусть в поле директора $d(r)$ имеется дисклинационная линия L , т. е. линия, на которой поле $d(r)$ терпит разрыв (рис. 6, а). Окружим ее замкнутым контуром γ . Каждая точка r этого контура

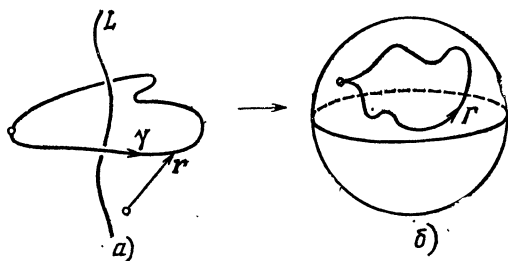


Рис. 6.

имеет своим образом точку $d(r)$ на поверхности RP^2 , а весь замкнутый контур γ отображается в замкнутый контур Γ на поверхности RP^2 (рис. 6, б). Очевидно, что любой непрерывной деформации поля $d(r)$ в окрестности контура γ соответствует деформация контура Γ на поверхности RP^2 . В частности, деформация распределения $d(r)$, названная вытеканием линии в третье измерение (см. рис. 3), сопровождается стягиванием контура Γ на поверхности RP^2 в точку (рис. 7, а — в).

Понятно, что и в общем случае устранимым (неустойчивым) дисклинациям на поверхности RP^2 соответствуют контуры Γ , стягиваемые в точку. Будем обозначать класс таких контуров, а вместе с ним и дисклинаций, символом Γ_0 . Легко сообразить, что для пло-

ских полей к этому классу относятся все дисклинации с целым индексом ν векторного поля $d(r)$ (см. рис. 2, а — е). Все контуры класса Γ_0 , а значит, и все векторные поля дисклинаций этого класса можно непрерывно продеформировать друг в друга.

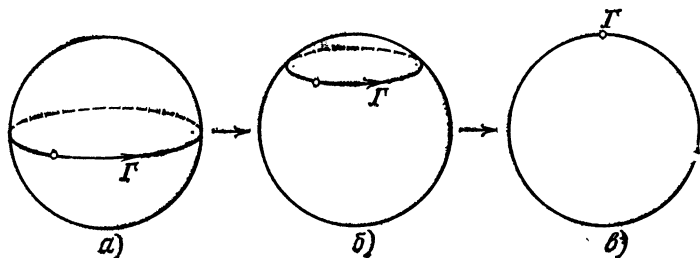


Рис. 7.

С другой стороны, в нематиках имеются дисклинации, изображенные, например, на рис. 2, з, д, такие, что образами окружающих их контуров γ являются контуры типа $\Gamma_{1/2}$, соединяющие диаметрально противоположные точки сферы (рис. 8). Мы знаем, что такие точки эквивалентны, а значит, контуры $\Gamma_{1/2}$ замкнуты! В отличие от контуров типа Γ_0 , контуры $\Gamma_{1/2}$ невозможно стянуть в точку по поверхности RP^3 . В этом отношении контуры типа $\Gamma_{1/2}$ напоминают контуры, обходящие дырку у бублика. Это легко себе представить, деформируя и склеивая сферу только в двух диаметрально противоположных точках A — начала и конца контура $\Gamma_{1/2}$.

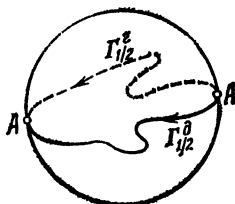


Рис. 8.

Контуры типа $\Gamma_{1/2}$ невозможно стянуть в точку, зато их можно продеформировать друг в друга. Дисклинации, изображенные на рис. 2, з, д, устойчивы. Соответствующие им распределения невозможно превратить в однородные никакой непрерывной деформацией поля $d(r)$, хотя легко преобразовать друг в друга. Полезно самостоятельно продеформировать поле рисунка 2, з в поле рисунка 2, д, для чего предварительно сделать деформацию соответствующих контуров $\Gamma_{1/2}$ на RP^3 , изображенных на рис. 8.

Подчеркнем, что существование замкнутых контуров $\Gamma_{1/2}$, не стягиваемых в точку, а значит, и топологически устойчивых дисклинаций, является исключительно следствием эквивалентности диаметрально противоположных точек d и $-d$. На обычной сфере без всяких склеек любой замкнутый контур можно стянуть в точку и, следовательно, если бы состояния d и $-d$ были отличимы, то в таком веществе (изотропный ферромагнетик) вообще не было бы

устойчивых особых линий. Сфера и RP^2 локально (в окрестности каждой точки) эквивалентны, но глобально (в целом) имеют разные топологические свойства!

Итак, с точки зрения топологии в нематическом жидком кристалле имеется всего два типа линий дисклинаций: характеризую-

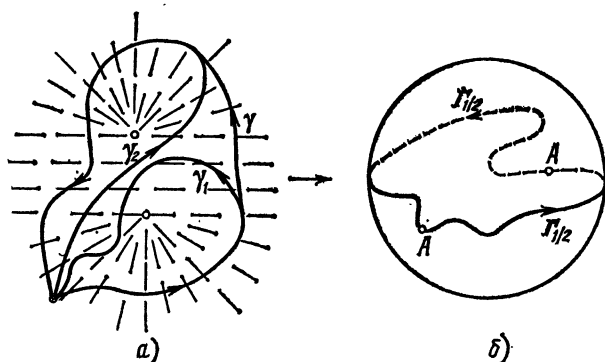


Рис. 9.

мых на проективной плоскости замкнутыми контурами типа Γ_0 , стягиваемыми по ней в точку, либо замкнутыми контурами типа $\Gamma_{1/2}$ не стягиваемыми по ней в точку. Устойчивые линии типа $\Gamma_{1/2}$ не могут заканчиваться внутри объема с нематиком. Они либо замкнуты, либо выходят на поверхность. Докажем это утверждение от противоположного. Если бы они могли заканчиваться в объеме, то тогда с них можно было бы снять и стянуть в точку охватывающий их контур γ , а значит, стянулся бы в точку и его образ $\Gamma_{1/2}$ на проективной плоскости, что невозможно для контуров типа $\Gamma_{1/2}$. Напротив, неустойчивым линиям топология не запрещает заканчиваться внутри объема, однако отрезкам особых линий энергетически выгодно сокращать свою длину и они или исчезают совсем, или, если они одним концом прикреплены к поверхности, сжимаясь, превращаются в поверхностную особую точку.

Линии дисклинаций взаимодействуют между собой, и в случае притяжения две линии могут, например, сливаться в одну. Каков будет результат слияния? Получится ли из двух устойчивых вновь устойчивая линия или она будет неустойчивой и исчезнет, т. е. исходные линии аннигилируют? Топология дает ответ и на этот вопрос. На проективной плоскости образом контура $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (см. рис. 9, а), охватывающего сразу две линии типа $\Gamma_{1/2}$, будет контур $\Gamma_{1/2}$, проходимый дважды, что обозначается как произведение $\Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_{1/2}$. Как явствует из рис. 9, б, такой контур эквивалентен контуру Γ_0 и, следовательно, стягиваем в точку. Это означает,

что две устойчивые дисклинации, сливаясь, превращаются в неустойчивую дисклинацию типа Γ_0 , т. е. аннигилируют. В сказанном можно убедиться и непосредственно, деформируя распределение $\mathbf{d}(\mathbf{r})$, изображенное на рис. 9, а, в распределение рис. 2, а. Напротив, слияние устойчивой и неустойчивой дисклинаций всегда дает устойчивую, что можно коротко записать как $\Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_0 = \Gamma_0 \cdot \Gamma_{1/2} = \Gamma_0$.

Сформулированные законы умножения означают, что множество классов контуров на RP^2 , состоящее из двух элементов Γ_0 и $\Gamma_{1/2}$, образует группу $\pi_1(RP^2)$, называемую *фундаментальной группой* проективной плоскости. Умножение элементов в этой группе можно заменить эквивалентным ему сложением индексов у контуров, при условии, что все целые числа эквивалентны нулю:

$$\Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_{1/2} = \Gamma_0 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0; \quad \Gamma_{1/2} \cdot \Gamma_0 = \Gamma_{1/2} \rightarrow \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

4. Особые точки

Кроме особых линий в поле вектора $\mathbf{d}(\mathbf{r})$, в объеме, занимаемом немагнетиком, возможны особые точки — точки разрыва в поле $\mathbf{d}(\mathbf{r})$. Простейшим примером такой точки является точка, вокруг которой направления вектора \mathbf{d} совпадают с направлениями радиус-вектора, отложенного из этой точки $\mathbf{d}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$. Векторы $\mathbf{d}(\mathbf{r})$, торчащие во все стороны вокруг особой точки, напоминают иголки свернувшегося в клубок ежа, поэтому эта особая точка получила название *еж*. Устойчив ли еж? Иными словами, можно ли путем непрерывной деформации поля $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ устранить эту особую точку и превратить поле $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ в однородное? Для ответа на этот вопрос окружим особую точку сферой σ . образом сферы σ на RP^2 будет вся поверхность RP^2 , проходимая один раз. Таким образом, поле $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ вокруг ежа осуществляет *отображение степени единица* сферы σ на RP^2 . Будем непрерывно деформировать поле $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ — «причесывать» ежа. При этом образ сферы σ , который можно представлять как замкнутую пленку (т. е. пленку без края), обтягивающую RP^2 , будет также деформироваться и образовывать складки. Но стянуть эту пленку в точку, оставаясь на RP^2 , нам не удастся, а значит, и не удастся устранить особую точку в поле $\mathbf{d}(\mathbf{r})$. Степень отображения — топологический инвариант.

В общем случае, для исследования произвольной особой точки в поле $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ на устойчивость, надо окружить ее сферой σ и проследить за ее образом на RP^2 . Всем устойчивым особым точкам соответствуют пленки — образы σ на RP^2 , целое число раз окутывающие проективную плоскость. Неустойчивым особым точкам соответствуют замкнутые пленки, стягиваемые по RP^2 в точку со

степень отображения $N = 0$. Устойчивые особые точки, как и устойчивые особые линии, можно устранить только путем создания разрывов в поле $\vec{d}(r)$, что требует преодоления колоссального энергетического барьера. Мы рассматривали такой процесс в случае особой линии (см. рис. 4). В отличие от особой линии, для устранения устойчивой особой точки необходимо создать разрыв в поле $\vec{d}(r)$ на выходящей из нее линии.

Степень отображения — целочисленный индекс. Возникает вопрос: чем отличаются ежи, имеющие степень разного знака, например, ежи с $N = 1$ и $N = -1$. Они должны отличаться направлением иголок, т. е. разной ориентацией пленок — образов сферы σ . В первом случае иголки торчат наружу, а во втором — внутрь. Но мы знаем, что противоположные направления $\vec{d}(r)$

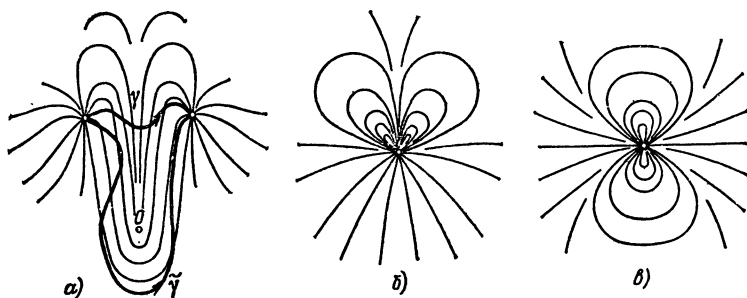


Рис. 10.

неотличимы. Поэтому ежи с $N = 1$ и $N = -1$ — это одна и та же особая точка с $|N| = 1$. С другой стороны, слияние двух ежей, казалось бы, должно приводить к сложению индексов, и значит, если мы сложим два ежа с индексами $|N_1| = 1$ и $|N_2| = 1$, мы можем получить как ежа с индексом 2, так и ежа с индексом 0, т. е. устранимую (неустойчивую) особую точку. Такое поведение кажется невероятным. А что же будет на самом деле?

Реальный процесс слияния ежей дает результат, зависящий от пути слияния! Этот факт следует из нетривиальности фундаментальной группы нематического жидкого кристалла $\pi_1(RP^3)$. В топологии его называют *влиянием* π_1 . Например, слияние особых точек с $|N_1| = 1$ и $|N_2| = 1$ может происходить вдоль путей γ и $\tilde{\gamma}$, проходящих по разные стороны от линии устойчивой дисклинации. На рис. 10, а тонкими линиями показаны линии поля $\vec{d}(r)$, линия дисклинации перпендикулярна плоскости рисунка и обозначена буквой O . Очевидно, слияние вдоль пути γ дает точечную особенность с $|N| = 2$, изображенную на рис. 10, б. Обратим внимание, что распределение поля на рис. 10, в не имеет оси сим-

метрии, а только плоскость симметрии, перпендикулярную плоскости рисунка. Слияние ежей вдоль пути $\tilde{\gamma}$ дает точечную особенность с $|N| = 0$, которая показана на рис. 10, *в*. Здесь распределение $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ аксиально симметрично относительно горизонтальной оси, проходящей в плоскости рисунка.

Итак, наличие дисклинации в поле $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ приводит к неоднозначности результата слияния ежей. Разумеется, неоднозначность имеет место только в присутствии топологически устойчивых дисклинаций, соответствующих нетривиальным элементам фундаментальной группы.

5. Что и где еще?

Мы видели, что топологические свойства замкнутых контуров и пленок на проективной плоскости дают возможность проанализировать ряд вопросов, связанных с устойчивостью и слиянием дисклинаций и особых точек в нематическом жидком кристалле. Кроме особенностей поля $\mathbf{d}(\mathbf{r})$, топология дает возможность расклассифицировать устойчивые неособые конфигурации поля $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ — доменные стенки и солитоны, возникающие в поле $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ в присутствии внешних электрических и магнитных полей.

Нематик не одинок. Существует целый обширный класс упорядоченных веществ: обычные и жидкие кристаллы всех типов, ферро- и антиферромагнетики, сегнетоэлектрики, сверхпроводники и сверхтекучие жидкости, при изучении которых оказываются полезными топологические методы. Поведение особенностей в нематике определяется топологическими свойствами области изменения директора \mathbf{d} — проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. В других упорядоченных веществах реализуются другие типы полей: поля векторов, поля матриц и, соответственно, другие области D изменения параметра порядка. Фундаментальная группа π_1 , вообще говоря, некоммутативна. Из существующих в природе веществ некоммутативную фундаментальную группу $\pi_1(D)$ имеет лишь двухосный*) нематический жидкий кристалл. Некоммутативность $\pi_1(D)$ приводит к ряду красивых, но пока еще экспериментально не обнаруженных следствий.

Наиболее впечатляющие приложения топологии появились в связи с открытием в 1972 г. сверхтекучих фаз легкого изотопа гелия — ^3He . Оказалось, что сами сверхтекучие свойства этих фаз в значительной мере диктуются топологией. Об этих свойствах, а также многих других приложениях топологии в физике можно прочесть в брошюре Г. Е. Воловика и В. П. Минеева «Физика и топология», выпущенной в 1980 г. издательством «Знание».

*) Нематический жидкий кристалл, с которым имели дело мы, — одноосный нематический жидкий кристалл.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора	3
Предисловие авторов	5
Часть первая. ТОПОЛОГИЯ ЛИНИЙ	7
1. Идея непрерывности	7
2. Чем занимается топология?	11
3. Простейшие топологические инварианты	15
4. Эйлерова характеристика графа	18
5. Индекс пересечения	22
6. Теорема Жордана	27
7. Что такое линия?	30
8. Кривая Пеано.	37
Часть вторая. ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ	41
9. Теорема Эйлера	41
10. Поверхности	43
11. Эйлерова характеристика поверхности	49
12. Классификация замкнутых ориентируемых поверхностей	53
13. Классификация замкнутых неориентируемых поверхностей	60
14. Векторные поля на поверхностях	68
15. Проблема четырех красок	74
16. Раскрашивание карт на поверхностях	76
17. «Дикая сфера»	81
18. Узлы	87
19. Коэффициент зацепления	92
Часть третья. ГОМОТОПИИ И ГОМОЛОГИИ	98
20. Периоды многозначных функций	98
21. Фундаментальная группа	101
22. Клеточные разбиения и полиэдры	106
23. Накрытия	110
24. Степень отображения и основная теорема алгебры	115
25. Группа узла	119
26. Циклы и гомологии	123
27. Топологическое произведение	134
28. Расслоения	137
29. Теория Морса	142
Приложение. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ (В. П. Минеев)	148

Владимир Григорьевич Болтянский
Вадим Арсеньевич Ефремович
НАГЛЯДНАЯ ТОПОЛОГИЯ

(Серия: Библиотечка «Квант»)

Редактор *Г. С. Куликов*

Техн. редактор *Е. В. Морозова*

Корректоры *Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова*

ИБ № 11913

Сдано в набор 20.07.82. Подписано к печати 16.09.82.
Формат 84×108¹/₁₆. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура.
Высокая печать. Условн. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 8,56. Тираж 120 000
Заказ № 1904. Цена 25 коп.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10

БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:**

- Вып. 1. М. П. Бронштейн. Атомы и электроны.
Вып. 2. М. Фарадей. История свечи.
Вып. 3. О. Оре. Приглашение в теорию чисел.
Вып. 4. Опыты в домашней лаборатории.
Вып. 5. И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламазов. Задачи по физике.
Вып. 6. Л. П. Мочалов. Головоломки.
Вып. 7. П. С. Александров. Введение в теорию групп.
Вып. 8. Г. Штейнгауз. Математический калейдоскоп.
Вып. 9. Замечательные ученые.
Вып. 10. В. М. Глушков, В. Я. Валах. Что такое ОГАС!
Вып. 11. Г. И. Копылов. Всего лишь кинематика.
Вып. 12. Я. А. Смородинский. Температура.
Вып. 13. А. Е. Карпов, Е. Я. Гик. Шахматный калейдоскоп.
Вып. 14. С. Г. Гиндикин. Рассказы о физиках и математиках.
Вып. 15. А. А. Боровой. Как регистрируют частицы.
Вып. 16. М. И. Каганов, В. М. Цукерник. Природа магнетизма.
Вып. 17. И. Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии [планиметрия].
Вып. 18. Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова. Беседы о преломлении света.
Вып. 19. А. Л. Эфрос. Физика и геометрия беспорядка.
Вып. 20. Л. М. Блиннов, С. А. Пикин. Жидкие кристаллы.
Вып. 21. В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович. Наглядная топология.